**Теоретическая и практическая часть элективного курса**

**« Уравнения в целых числах»**

**I. Основы теории делимости чисел (15 часов).**

**1.1 Делимость натуральных чисел**

Определение 1. Пусть даны два натуральных числа – *a* и *b*. Если существует натуральное число *q* такое, что выполняется равенство *a=bq*, то говорят, что число *a* делится на число *b*. При этом число *а* называют делимым, *b* - делителем, *q* - частным. Число *a* называют кратным числа *b*.

Вместо фразы «*a* делится на *b*» часто используют запись *a*$ \vdots $ *b*. Запись 8 $\vdots $2 означает, что число 8 делится на 2 без остатка.

Отношение « делится на » распространяется и на множество целых чисел. Например, справедливы утверждения: ($-$12)$ \vdots $ 3, 48$ \vdots $ ($-$6), 0$ \vdots $ *n*, где *n*$-$ любое натуральное число. Мы будем говорить о делимости во множестве натуральных чисел.

Опираясь на сформулированное определение, можно получить ряд свойств отношения делимости на множестве натуральных чисел.

Свойство 1. Если $a\vdots c u c\vdots b,то a\vdots b.$

Например, из того, что 48$ \vdots 6 и 6 \vdots 3$,можно сделать вывод, что 38$ \vdots 3.$

 Свойство 2. Если $a\vdots b u c\vdots b то\left(a+c\right)\vdots b.$

Например, из того, что 12$ \vdots 3 и 21\vdots 3$, можно сделать вывод, что (12+21)$ \vdots 3$.

Свойство 3. Если *a* $\vdots $*b* и *c* не делится на *b*, то *(a + c)* не делится на *b*.

Например, из того, что 12$ \vdots $ 3 и 22 не делится на 3, можно сделать вывод, что (12+22)$ не делится на 3$. В то же самое время из того, что каждое слагаемое делится на *b*,то каждое слагаемое не делится на *b*. Например, 14 не делится на 3 , 22 не делится на 3 , но (14+22)$ \vdots $ 3.

Свойства 2 и 3 распространяются на сумму любого конечного числа слагаемых следующим образом: если каждое слагаемое делится на число *b*, то и сумма делится на *b*;если каждое слагаемое, кроме одного, делится на *b*, то сумма не делится на *b*.

 Свойство 4. Если *a* $\vdots $*b* и *(a + c)*$ \vdots $ *b,* то *c* $\vdots b$.

Например, из того, что 12$ \vdots $ 3 и (12+21)$ \vdots $ 3 можно сделать вывод, что 21$ \vdots $ 3.

Свойство 5. Если *a*$ \vdots b\_{1}$ и *c*$ \vdots $$b\_{2}$ ,то *ac*$ \vdots $$b\_{1}b\_{2}$.

Например, из того, что 12 $\vdots 3 $и 28 $\vdots 7 , $можно сделать вывод, что

(12$∙$28)$ \vdots $(3$∙$7).

Свойство 6. Если *a*$ \vdots $ *b* и *с* - любое натуральное число, то *ac* $\vdots $*bc;*

если *ac* $\vdots $*bc*, то *a* $\vdots $*b.*

Например, из того, что 12 $\vdots 3$, можно сделать вывод, что (12 $∙$ 5) $\vdots $(3 $∙$ 5) и обратно.

Свойство 7. Если *a* $\vdots b,$ и *c* – любое натуральное число, *ac* $\vdots $*b*.

Например, из того, что 12 $\vdots $3, можно сделать вывод, что (12 $∙$ 5)$ \vdots $ 3.

Следует заметить, что свойство, обратное свойству 7, не имеет места: из того, что *ac* $\vdots $ *b*, нельзя сделать вывод, что или *a,* или *c* делится на *b*. Например, 45$ \vdots $ 15 и 45 = 9 $∙$ 5, но ни 9, ни 5 не делятся на 15.

Свойство 8. Если *a* $\vdots $ *b* и *c* $\vdots $ *b*,что для любых натуральных чисел *n* и *k* справедливо соотношение *(an + ck)*$ \vdots $ *b.*

Например, из того, что 12 $ \vdots $ 3 и 21 $\vdots $3, можно сделать вывод, что

 (25 $∙$ 12 + 271 $∙$ 21)$ \vdots 3. $

Свойство 9. Среди *n* последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на *n.*

В самом деле, если мы возьмём любые три подряд идущих натуральных числа, например, 8, 9, 10 или 106, 107, 108, то одно число из тройки делится на 3 (для первой тройки это число, для второй – число 108). Если мы возьмём любые 10 подряд идущих натуральных чисел, то одно обязательно делится на 10. Если же мы возьмём два подряд идущих чётные числа, то одно обязательно делится на 4.

 Пример 1. Доказать, что для любого натурального числа *n* число

$n^{5}-5n^{3}+4n делится на 2, 3, 4, 5, 8.$

Решение.

Разложим многочлен на множители:$ n^{5}-5n^{3}+4n=n\left(n^{4}-5n^{2}+4\right)=$

$$=n\left(n^{4}-n^{2}-4n^{2}+4\right)=n\left(n^{2}\left(n^{2}-1\right)-4\left(n^{2}-1\right)\right)=n\left(n^{2}-1\right)\left(n^{2}-4\right)==\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+ 1\right)\left(n+2\right).$$

Рассмотрим полученное произведение. При *n=1, n=2* оно обращается в *0*, значит, делится на *2, 3, 4, 5, 8*. При *n>2* имеем произведение пяти последовательных натуральных чисел $n - 2, n - 1, n , n + 1, n + 2$. Из этих пяти чисел, по свойству 9,одно обязательно делится на *5*, хотя бы одно – на *3*, хотя бы одно – на *4*, и кроме того есть ещё хотя бы одно чётное число, т.е. число, делящееся на *2*. Тогда, по свойствам 5 и 7, произведение этих пяти чисел делится на *2 ,3, 4, 5* и на произведение *2* и *4* , т.е. делится на *8*.

Пример 2. Доказать, что при любом целом *a* разность $a^{2}-$*а* делится на *2*.

Решение. Разложим эту разность на множители: $a^{2}-$*а= а (а*$ - $*1).*

Из двух последовательных целых чисел, *а*$-$*1* и *а* одно (и только одно) является чётным.

Пример 3.Доказать, что при любом целом *а* разность $a^{3}-$*а* делится на 3.

Решение. Разложим разность, $a^{3}-$*а* на линейные множители:

$a^{3}-$*a =*$ a^{2}$$-$*1) а = (а*$-$*1) а (а+1).*

Из трёх последовательностей целых чисел, *а*$-$*1 , а, а +1* одно (и только одно) делится на 3. Но тогда и всё произведение делится на 3 по свойству 4 делимости.

Пример 4. Доказать, что квадрат целого числа при делении на 3 может давать в остатке только 0 или 1 (и, следовательно, не может давать остаток 2).

Решение. Представим делимость ($a^{3}-а$)$ \vdots $ 3 в виде *а*($a^{2}$ $-$1)$ \vdots $ 3.

Так как 3 число простое, то или *а*, или $a^{2} -1 $делится на 3.

Если *а* делится на 3, то и $a^{2}$ делится на 3, а значит ,$ a^{2}$ при делении на 3 даёт в остатке нуль.

Если $a^{2}$ $-$1 делится на 3 , то $a^{2}$$-$*1= 3k (k*$ϵ$*Z),* $a^{2}$*=3k*$+$*1,* т.е. $a^{2} $при делении на 3 даёт в остатке 1.

Пример 5. Докажем, что при любом целом *n* сумма $n^{2}-$*3*$n^{2}$*+8n* делится на 6.

Решение. 1)$ n^{2}-$*3*$n^{2}$*+8n=n(*$n^{2}-$*3n+8)*$ $*=n(*$n^{2}-$*n*$-$*2n+8)=n(n(n*$-$*1)*$-$*2(n*$-$*4))−* каждое из слагаемых делится на 2, значит и всё выражение делится на 2.

2)$ n^{2}-$*3*$n^{2}$*+8n*$=n^{3}$*−n*$-$*3*$n^{2}$*+9n=*$(n^{3}$*−n*$)-$*3n(n−3)=n(n−1)(n+1)−3n(n−3)−* каждое из слагаемых делится на 3, значит и всё выражение делится на 3.

Следовательно, сумма $n^{2}-$*3*$n^{2}$*+8n* делится на 6.

Пример 6. Доказать, что если сумма *a+b+c*, где *a,b,c* – целые, делится на 3, то и сумма $a^{3}+b^{3}+c^{3}$ делится на 3.

Решение. Преобразуем последнюю сумму следующим образом:

$a^{3}+b^{3}+c^{3}$*=*$(a^{3}-a)+$*(*$ b^{3}-b $*)+(*$ c^{3}-c$ *)+(a + b + c).*

Каждое из четырёх слагаемых последней суммы делится на 3, следовательно, и вся сумма делится на 3.

Пример 7. Доказать, что если целые числа *a* и *b* не делятся на 3 , то $a^{2}-b^{2}$ делится на 3.

Решение. Пусть *a=3*$ k$ *+1,b=3*$ l$ *+2,* тогда $a^{2}-b^{2}=9k^{2}+6k+1-9l^{2}-12l-4$=$9k^{2}-9l^{2}+6k-12l-3$=

=$9\left(k^{2}-l^{2}\right)+6\left(k-2l\right)-3.$

 Данные задания предлагаются для самостоятельного решения.

Пример 8. Ни одно из целых чисел *a*, *b* и *с* не делятся на *3*. Верно ли, что сумма $a^{2}+b^{2}+c^{2}$ делится на 3.

Пример 9. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами длина по меньшей мере одного из катетов делится на 3.

Пример 10. Доказать, что сумма $a^{2}+b^{2}$, где *a и b* –целые числа, делится на *3*, то каждое из чисел *a* и *b* делится на *3*.

 Решение. Из делимости $(a^{2}+b^{2})\vdots 3$ следует, что числа *a* и *b* или оба делителя, или оба не делятся на *3*. Рассмотрим вторую возможность. Тогда каждое из чисел $a^{2} и b^{2} $при делении на 3 даёт в остатке 1:

$a^{2 }=3k+1, b^{2}=3l+1,$ где $k,l$- целые неотрицательные числа. Сложим эти неравенства почленно: $ a^{2}+b^{2}=3\left(k+l\right)+2.$

Получилось, что сумма $a^{2}+b^{2} $не делится на 3. Но это противоречит условию. Остаётся первая возможность: числа *a* и *b* делятся на 3.

Пример11. Докажем, что при любом целом *а* разность $a^{5}-а$ делится на 5.

Решение. Разложим данную разность на множители: $a^{5}-а=а(a^{4}-1)=$

$$=а\left(a^{2}+1\right)\left(a^{2}-1\right)=\left(а-1\right)а\left(а+1\right)\left(a^{2}+1\right).$$

Теперь можно рассмотреть пять случаев:

$a=5k, a=5k+1, a=5k+2 , a=5k+3, a=5k+4$ *(k*$ϵ$ *Z),* множитель $a^{2}+1$ представим в таком виде: $a^{2}+1=(a^{2}-4)+5.$ Получаем:$ $

Первое слагаемое этой суммы делится на 5 как произведение пяти последовательных чисел, второе также делится на 5. Следовательно, и вся сумма, т.е. $a^{5}-a$ делится на 5.

Данные задания предлагаются для самостоятельного решения.

1) Докажите, что 723+343 делится на 106.

2) Докажите, что(13+23+33+…+1813+1823) делится на 183.

3) Докажите, что 183+263 делится на 176.

4) Докажите, что(23+33+…+1963+1973) делится на 199.

**1.2. Признаки делимости**

На этом занятии мы поговорим о признаках делимости на 2, 3, 4, 5 и т.д.

*Признак делимости на 2.* Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

*Признак делимости на 5.* Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра делилась на 5 ( т.е. цифра единиц либо 0, либо 5)

*Признак делимости на 10.* Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.

*Признак делимости на 4.* Для того , чтобы натуральное число *р,* содержащее не менее трех цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа *р.*

Докажем, это свойство. Любое число *р*, содержащее не менее трех цифр, можно представить в виде *р=100а+с*, где *с-* число, образованное последними двумя цифрами числа *р.*

Так как *100а*$ \vdots $*4*, то по свойствам делимости *(100а+с)*$ \vdots $ *4*, если *с*$ \vdots $ *4.*

Аналогичные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 25, 8 и 125.

*Признак делимости на 25.* Для того чтобы натуральное число *р*, содержащее не менее трех цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа *р*.

*Признак делимости на 8.* Для того чтобы натуральное число *р*, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа *р*.

*Признак делимости на 125.* Для того чтобы натуральное число *р*, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа *р*.

*Признак делимости на 3.* Для того чтобы натуральное число *р* делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

Рассмотрим доказательство этого свойства. Количество цифр в числе *р* значения не имеет, поэтому предположим, что число р состоит из пяти цифр:

*р* =$\overline{abcde}$=10 000*a +* 1 000*b* +100*c* +10*d +e =* (9999 +1)*a* +(999+1)*b* +(99 +1)*c* +(9+1)*d*+ e = (9999*a* + 999*b +*99*с +*9*d*) + (*a* + *b* + *c* + *d* + *e).*

(9999*a* + 999*b +*99*с +*9*d)*$ \vdots $ 3, для делимости на 3 числа *р* необходимо и достаточно, чтобы делилась на 3 сумма пяти слагаемых во вторых скобках- это и есть сумма цифр числа *р.*

*Признак делимости на 9.* Для того чтобы натуральное число *р* делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Рассмотрим примеры, которые можно предложить учащимся.

Пример 1. Доказать, что если сумма цифр числа *m* равна сумме цифр числа *2m*, то число *m*$ \vdots 9.$

Решение. Если *m=a0+10a1+102a2+…., 2m=b0+10b1+102b2+…* − конечные числа в десятичной записи числа, то *m=2m−m=b0+b1+b2+…+ 9b1+99b2+…−(a0+a1+a2+… +9 a1+99a2+…)= (b0+b1+b2+…−( a0+a1+a2+…)) + (9(b1−a1) +99(b2−a2) + …) = 9(b1−a1) +99(b2−a2) + …* $\vdots 9, $

*b0+b1+b2+…−( a0+a1+a2+…)= 0,* т.к. суммы цифр равны.

Например, 18 и 36; 27 и 54; 81 и 162. Наименьшее из чисел, делящихся на 9, у которых сумма цифр не равна сумме цифр удвоенного числа – 144.

Пример 2. Найти цифру *X*, при которой число $\overline{5X793X4}$ делится нацело на 3.

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 3: *5+Х+7+9+3+Х+4=2Х+28= 2(Х+14)* $\vdots 3.$ Непосредственной подстановкой вместо *Х* цифр *0, 1, …,9* получаем *Х=1, 4, 7.*

Ответ: 1, 4, 7.

Пользуясь признаками делимости на 2, 3, 5, 9, 10, можно строить признаки делимости на произведения этих чисел: 6, 18, 22, 36, 55…

Пример 3. Найти все числа вида *n*=$\overline{34x5y}$ такие, что *n* делится без остатка на 36.

Решение. Разложим 36 на произведение взаимно простых множителей 36=9·4. Очевидно, что должны выполняться оба признака делимости на 4 и на 9. Воспользуемся признаком делимости на 4, $\overline{5y}$=50+*y*  − должно делиться на 4.  *y* =2 или  *y* =6.

Пусть *y*=2, тогда число $\overline{34x52}$ должно делиться на 9, т.е *3+4+x+5+2=*

*=14+ x*$ \vdots 9, $ отсюда *x=4* и число равно 34452.

Пусть *y*=6, тогда число $\overline{34x56}$ должно делиться на 9, т.е *3+4+x +5+6=*

*=18+x* $\vdots 9, $ отсюда  *x* =0 или  *x* =9 и число равно 34056 или 34956.

Ответ: 34452, 34056, 34956.

Пример 4. Число *14а+11b* не делится на *5*; докажите, что тогда и *9а+b* не делится на *5.*

Решение. *14а+11b*=*5а+9а+10b+b=(5а+10b)+(9а+b),* т.к первое слагаемое делится на 5, тогда второе слагаемое не делится на 5.

Данное задание предлагается для самостоятельного решения.

Пример 5. Число *17а+29b* не делится на *13*; докажите, что тогда и *4а+3b* не делится на *13.*

Пример 6. К числу припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное четырёхзначное число делилось на 36. Найдите все решения.

Решение. Обозначим неизвестные цифры через *х* и *у*. применим к числу $\overline{x41y}$ признак делимости на 4. $\overline{1y} \vdots 4.$ Тогда *y=2* или *y=6.*

1) Если *y=2*, то получим число $\overline{x412 }$. На основании признака делимости на 9 получим *(х+4+1+2)*$ \vdots 9, $ *(х+7)*$ \vdots 9.$ Отсюда *х=2.*

2) Если *y=6*, то получим число $\overline{x416 }$. На основании признака делимости на 9 получим *(х+4+1+6)*$ \vdots 9, $ *(х+11)*$ \vdots 9.$ Отсюда *х=7.*

Ответ: *2412, 7416.*

Пример 7. Найдите цифру *а,* если число $\overline{49a68}$ делится на 8. Укажите все решения.

Решение. Число делится на 8 , если три последние цифры в записи числа делятся на 8. Этому условию удовлетворяют все нечетные цифры: *1,3, 5, 7, 9.*

Ответ: *49168, 49368, 49568, 49768, 49968.*

Для самостоятельного решения можно предложить следующий пример.

Пример 8. Докажите, что число 4444…4 (*n* четвёрок) не делится на 8 ни при каком натуральном *n.*

Пример 9. Найдите все цифры *а* и *b*, такие чтобы число $ \overline{5a6b2}$ делилось на *72*. Укажите все решения. *(72=9∙8).*

Пример 10. Найдите все значения цифр *а* и *b*, такие чтобы число $ \overline{53ab213}$ делилось на 99. Укажите все решения.

Решение. По условию это число делится на 9 и на 11. Применим признак делимости на 9*: (5+3+а+b+2+1+3)*$ \vdots 9, $*(14+а+b)*$ \vdots 9, $*(9+(5+а+b))*$ \vdots 9, $ *(5+а+b)* $\vdots 9.$ Отсюда, *а+b*=4 или  *а+b=13*.

Теперь используем признак делимости на 11: *(5−3+а−b+2−1+3)*$ \vdots 11, $ *(6+а−b)*$\vdots 11.$Тогда, *а−b =5* или *а−b =−6.* Рассмотрим четыре возможных случая.

1)$ \left\{\begin{array}{c}a+b=4,\\a-b=-6;\end{array}\right.$ 2)$ \left\{\begin{array}{c}a+b=4,\\a-b=5;\end{array}\right.$ 3)$ \left\{\begin{array}{c}a+b=13,\\a-b=-6;\end{array}\right.$ 4)$ \left\{\begin{array}{c}a+b=13,\\a-b=5.\end{array}\right.$

Учитывая, что 1) и 4) системы имеют одинаковую чётность, достаточно рассмотреть только эти два случая.

1)$ \left\{\begin{array}{c}a+b=4,\\a-b=-6;\end{array}\right.$ *а=−1* – это невозможно.

4)$ \left\{\begin{array}{c}a+b=13,\\a-b=5;\end{array}\right.$ *а=9, b=4.*

Ответ: *5394213.*

**1.3. Простые и составные числа**

*Определение*. Если натуральное число имеет только два делителя – само себя и 1 , то его называют простым числом; если оно имеет более двух делителей, то его называют составным числом. Число 1, имеющее лишь один делитель – 1, не относится ни к простым, ни к составным.

Например, числа 2,3,5,7,19,101, - простые, а числа 4,6,8,35,121 – составные

*Теорема.* Множество простых чисел бесконечно.

Исследователей всегда интересовал вопрос о распределении простых чисел среди натуральных чисел. Выпишем подряд простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Назовем расстоянием между соседними простыми числами их разность. В выписанной последовательности эти расстояния равны, соответственно, 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6. А между соседними простыми числами 119 и 127 расстояние равно 8.

Пример 1. Натуральные числа *а* и  *b* таковы, что 31*а*=54*b*. Докажите, что число *а+ b* составное.

Решение. Так как число 31а делится на 54 и числа 31 и 54 взаимно простые, то а$ \vdots 54, тогда a=54n$, где *n*$\in N. $Тогда *31∙54∙n=54b, b=31n.* Отсюда, *a+b=54n+31n=85n*, а следовательно*, а + b* является составным.

Пример 2. Натуральные числа *а* и  *b* таковы, что 15*а*=32*b*. Может ли число *а− b* быть простым. Задание для самостоятельного решения.

Пример 3. Найдите все натуральные *а*, при которых число *а2− 10а+21* простое.

Решение. Разложим квадратный трехчлен на линейные множители:

*а2− 10а+21=(а−3)(а−7)−* данное число составное. Оно может быть простым, когда один из множителей равен 1, а другой – простому числу или когда один из них равен −1, а другой равен *–p*, где *р*− простое число.

1) Если *а−3=1*, то *а=4, а−7=−3.* Число *а2− 10а+21* отрицательно. Этот случай невозможен.

2) Если *а−7=1*, то *а=8, а−3=5,* где 5− простое число*,*  *а=8* удовлетворяет условию задачи.

3) Если *а−3=−1*, то *а=2, а−7=−5,* где 5− простое число*,*  *а=2* удовлетворяет условию задачи.

4) Если *а−7=−1*, то *а=6, а−3=3, (а−3)(а−7)−* отрицательно. Этот случай невозможен.

Ответ: *8; 2.*

**1.4. Деление с остатком**

Если натуральное число *a* не делится на натуральное число *b*, то рассматривают деление с остатком. Например, при делении числа 37 на 15 в частном получается 2 (неполное частное) и в остатке 7. При этом имеет место соотношение 37=15$∙$ 2 +7. Вообще справедлива следующая теорема.

*Теорема*. Если натуральное число *а* больше натурального числа *b* и *a*  не делится на *b*, то существует, и только одна пара натуральных чисел *q* и *r*, причём  *r<b*, такая, что выполняется равенство *a=bq+r.* (1)

Например, для *a* =37*, b* =15 такая пара чисел найдена выше: *q* = 2*,r* = 7 – при этом остаток *r* меньше делителя *b*.

Доказательство. По условию *b<a*. Рассмотрим числа *b,2b,3b,4b*,… Начиная с некоторого места, они все будут больше числа *a*. Первое из чисел такого вида, которое станет больше числа *a*, обозначим (*q+1)b*=*qb+b*. Следовательно, $ qb<a<qb+b$*.* Но тогда *a=bq+r,* где *r<b.*

Итак, существование интересующей нас пары чисел *q, r* доказано.

Докажем теперь, что такая пара единственна.

Предположим, что существует две различные пары натуральных чисел ($q\_{1};r\_{1}) и (q\_{2};r\_{2})$ такие что *, a = b*$q\_{1}$*+*$r\_{1}$*,* $r\_{1}<b$*; а = b*$q\_{2}$*+*$r\_{2}$*,* $r\_{2}<b$*.*

Сразу заметим, что если $ r\_{1}=r\_{2}=r$, то из равенства *b*$q\_{1}$*+*$r\_{1}$*= b*$q\_{2}$*+*$r\_{2}$ получим $q\_{1}=q\_{2}$, т.е. пары ($q\_{1};r\_{1})и(q\_{2};r\_{2}) $одинаковы; Если $q\_{1}=q\_{2}=q$, то из равенства *b*$q\_{1}$*+*$r\_{1}$*= b*$q\_{2}$*+*$r\_{2} получим r\_{1}=r\_{2}$, значит, опять пары одинаковы. Таким образом, если пары различны, то $q\_{1}\ne $ $q\_{2}$ и $r\_{1}\ne r\_{2}$.

Будем считать для определённости, что $r\_{1}>r\_{2}$. Так как *b*$q\_{1}$*+*$r\_{1}$*= b*$q\_{2}$*+*$r\_{2}$, то $r\_{1}-r\_{2}=b(q\_{2}-q\_{1})$. Это значит, что $r\_{1}-r\_{2}$ делится на *b*. Но это невозможно, поскольку натуральное число $r\_{1}-r\_{2}$ меньше *b*. Следовательно, сделанное предположение о существовании двух пар натуральных чисел неверно и единственность доказана.

*Замечание*. Если *a*$ \vdots $*b*, то можно считать, что для чисел *a* и *b* выполняется неравенство (1), где остаток *r = 0.*

*Замечание.* Иногда удобнее формулу деления с остатком записывать несколько в ином виде. Имеем:$ a=bq+r=b\left(q+1\right)-(b-r)$.

Поэтому можно записать так:$ a=bq\_{1 }-r\_{1}$, где 0$<r\_{1}<b. $(2)

Пример 1. Составить формулу:

а) четного числа;

б) нечетного числа;

в) натурального числа, которое при делении на 3 дает в остатке 2.

Решение. а) Четное число *n*– это число, которое делится на 2. Значит, *n=2k* –хорошо известная формула четного числа.

б) Нечетное число *n*–это число, которое при делении на 2 дает в остатке 1. Воспользовавшись соотношениями (1) или (2), получим формулу нечетного числа: *n =2k+1* или *n = 3k*–*1*.

в) Согласно соотношению (1), формула натурального числа *n*, которое при делении на 3 дает в остатке 2, имеет вид *n = 3k +2*. Или согласно формуле (2), можно записать так: *n = 3k – 1.*

Пример 2**.** Доказать, что если натуральное число *n* при делении на 3 дает в остатке 2, то оно не может быть точным квадратом.

Решение. По условию *n = 3q +2*. Предположим, что это число является точным квадратом, т.е. существует такое натуральное число *а*, что *n =*$ a^{2}$*.* Для самого числа, *а* есть три возможности:

 *а* делится на 3, т.е. имеет вид, *а=3k*;

 *а* при делении на 3 дает в остатке 1, т.е. имеет вид, *а=3k+1*;

*а* при делении на 3 дает в остатке 2, т.е. имеет вид, *а=3k+2*.

 Если, *а = 3k*, то $ n=a^{2} =(3k)^{2} =9k^{2}.$ Это число делится на 3, что противоречит условию.

 Если, *а=3k+1*, то$ n=a^{2} =(3k+1)^{2} =9k^{2}+6k+1=3\left(3k^{2}+2k\right)+1. $

Это число при делении на 3 дает в остатке 1, что противоречит условию.

Если, *а=3k+2*,то $n=a^{2}=(3k+2)^{2}=9k^{2}+12k+4=3\left(3k^{2}+4k+1\right)+1.$ Это число при делении на 3 дает в остатке 1, что опять противоречит условию.

 Таким образом, наше предположение неверно, т.е. заданное число *n = 3q +2* не является точным квадратом.

Пример 3. Найти все целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 2 дают остаток 1.

Решение. При делении на 6 могут получиться остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5. Тогда, *а=6k+r,* где *r= 0, 1, 2, 3, 4, 5.*

*а:2=3k+r:2, r*$\ne 0, 1, 2, 4. $Если *r= 3, 5,* то остаток от деления на 2 равен 1.

*а:3=2k+r:3, r*$\ne 0, 1, 2, 3, 4. $Если *r= 5,* то остаток от деления на 3 равен 2.

Отсюда получаем, что *а=6k+5, k*$ \in Z.$

Ответ: *а=6k+5, k*$ \in Z.$

Пример 4. Найти все натуральные числа, при делении которых на 6 в частном получится то же число, что и в остатке.

Решение. Обозначим искомое число через *а,* частное и одновременно остаток – через *q*. Тогда, *а = 6q + q*=7*q*. Так как остаток должен удовлетворять неравенству 0$<q<6$*,* $ то q$*=1, 2, 3, 4, 5.* Значит*, а=7, 14, 21, 28, 35.*

Ответ: *а=7, 14, 21, 28, 35.*

Пример 5. Докажите, что два различных натуральных числа при делении на их разность дают одинаковые остатки.

Решение. Обозначим эти числа *a* и *b,* где *a* $>$ *b*. Тогда *а=(a−b)q1+r1,*

 *b =(a−b)q2+r2.* Вычтем почленно эти равенства: *а−b=(a−b)(q1−q2)+( r1− r2).*

Отсюда разность *а−b* делится на *r1− r2.* Но$ r\_{1}<$ *а−b, r2*$ <$*a−b,* поэтому разность *r1− r2* по модулю меньше *а−b*. Следовательно, она может делиться на *а−b* только в одном случае, когда *r1− r2=0, r1= r2*.

Пример 6. Верно ли, что числа 36! и 38! при делении на 281 дают одинаковые остатки?

Решение. Найдем разность чисел: 38! −36! =36!(37∙38 −1)=36!∙(1406 −1)= =36!∙1405=36!∙281∙5. Так как разность чисел делится на 281, то остатки при делении одинаковые.

Ответ: верно.

Числа *a* и *b* называют сравнимыми по модулю *m ,* если разность этих чисел *а−b* при делении на *m* дает остаток 0. Используют такую форму записи:

*а* $≡ $*b* (mod m). Например, 100$ ≡1 \left(mod 9\right),$так как *100 −1* делится на *9;* 100$0≡-1 \left(mod 11\right),$так как *1000−( −1)* делится на *11.*

Пример 7. Докажите, что $6^{22}$−1 делится на 7.

Решение. 6 $≡-1 \left(mod 7\right),$так как *6−(−1)* делится на *7;* 622 $≡(-1)^{22} \left(mod 7\right),$

$(-1)^{22}=1, $то 622 $≡1 \left(mod 7\right),$ то есть $6^{22}$−1 делится на 7.

Пример 8. Найти остаток от деления 229 на 11.

Решение. Так как 25 $≡-1\left(mod 11\right),$ то (25)5$≡\left(-1\right)^{5}\left(mod 11\right),$ т.е.

225$ ≡-1\left(mod 11\right).$ Так как 24$≡5\left(mod 11\right) и $ 229$=2^{25}∙2^{4}$, то

229$≡5∙\left(-1\right)\left(mod 11\right), т.е. $229$≡-5\left(mod 11\right). $Так как−5 $≡6 \left(mod11\right),$ то остаток от деления 229 на 11 равен 6.

Пример 9. Найти остаток от деления 325 на 10.

Решение. Так как 32 $≡-1\left(mod 10\right),$ то (32)11$≡\left(-1\right)^{11}\left(mod 10\right),$ т.е.

322$ ≡-1\left(mod 10\right)$. Так как 33$≡-3\left(mod 10\right)$ и 325$=3^{22}∙3^{3}$, то

325$≡-3∙\left(-1\right)\left(mod 10\right), т.е. $325$≡3\left(mod 10\right). $Остаток от деления 325 на 10 равен 3.

Учащимся можно предложить решить и более сложные задания.

Пример 10. Найти остаток от деления 14256 на 17.

Решение.$ $$14^{256}≡(-3)^{256}=3^{256}=81^{64}≡(-4)^{64}=4^{64}=16^{32}≡(-1)^{32}==1 \left(mod 17\right).$**Ошибка! Ожидалась цифра.**$14^{256}≡(-3)^{256}=3^{256}=81^{64}≡(-4)^{64}=4^{64}=16^{32}$$14^{256}≡(-3)^{256}=3^{256}=81^{64}≡(-4)^{64}=4^{64}=16^{32}$$14^{256}≡(-3)^{256}=3^{256}=81^{64}≡(-4)^{64}=4^{64}=16^{32}≡(-1)^{32}==1 \left(mod 17\right).$

Ответ: 1.

Пример 11. Найти остаток от деления 6592  на 11.

Решение. 6592$=36^{296}≡3^{296}=81^{74}≡4^{74}=16^{37}≡5^{37}=5∙5^{36}=$

=$5∙25^{18}≡5∙3^{18}=5∙9^{9}=45∙81^{4}≡1∙4^{4}=256≡3 \left(mod 11\right).$

Ответ: 3.

 **1.5. и 1.6.** **Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел**

Рассмотрим два числа: 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Выпишем все делители числа 96:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 –их называют общими делителями чисел *72* и *96*, а наибольшее из них называют наибольшим общим делителем *(НОД)* чисел *72* и *96*. Итак, *НОД(72, 96)=24*.

Для любых заданных натуральных чисел можно найти *НОД*.

Например, *НОД (45, 75, 120)=15, НОД(27, 81)=27.*

*Определение*. Два натуральных числа *a* и *b* называют взаимно простыми числами, если у них нет общих делителей отличных от *1*; иными словами, если *НОД(a, b)=1*.

Например, взаимно простыми являются числа 35 и 36 , хотя каждое из них – составное число. В самом деле, у числа 35 четыре делителя: 1, 5, 7, 35, а у числа 36 девять делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Общих делителей, отличных от 1, у чисел 35 и 36 нет.

Для нахождения наибольшего общего делителя используют алгоритм Евклида.

Чтобы найти  *НОД* двух чисел надо:

1) большее из двух чисел разделить на меньшее;

2) меньшее из чисел на остаток при первом делении;

3) остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка. Последний отличный от нуля остаток и есть искомый *НОД* двух данных чисел.

Пример 1. Найдите *НОД(42598, 2014).*

Решение. Строим последовательность Евклида для данных чисел.

Разделим 42598 на 2014 с остатком: *42598=2014∙21+304, 2014=304∙6+190, 304=190∙1+114, 190=114∙1+76, 114=76∙1+38, 76=****38∙****2.*

*НОД(42598, 2014)= 38.*

Ответ: 38.

Для нахождения  *НОД* нескольких чисел, надо:

1) найти *НОД* двух любых чисел;

2) для получения наибольшего делителя и третьего числа вновь находится *НОД*  и так далее;

3) последнее полученное таким способом число и будет наибольшим общим делителем для всех данных чисел.

Пример 2. Найдите *НОД(91476, 3960, 3360).*

Решение. Найдем вначале *НОД(91476, 3960)*, *91476=3960∙23+396, 3960=****396∙****10,* т. е. *НОД(91476, 3960)=396.*

Найдем теперь *НОД(396, 3360), 3360=396∙8+192, 396=192∙2+12, 192=****12****∙16,*

*НОД(91476, 3960, 3360)= 12.*

Ответ: 12.

*Теорема*. Если даны натуральные числа *a* и *p* ,причём *p*–простое число, то либо *a* делится на *p*,либо *a* и *p* –взаимно простые числа.

Рассмотрим два числа 12 и 18. Выпишем кратные числа 12:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, … .

Выпишем кратные числа 18: 18,36,54,72,90,108,126,144,162,180, … .

Среди выписанных чисел есть одинаковые: 36,72,108,144, …

Их называют общими кратными чисел 12 и 18 , а наименьшее из них называют наименьшим общим кратных *(НОК)* чисел 12 и 18.

Итак, *НОК(12, 18)=36.*

Для любых заданных натуральных чисел можно найти *НОК.*

Например, *НОК(20, 30, 40)=120, НОК(27, 81)=81.*

С понятиями *НОД* и *НОК* связаны некоторые свойства делимости.

*Свойство 10*. Если  *К* – общее кратное чисел *a* и *b*, то *К* $\vdots $ *НОК(a, b).*

Доказательство. По условию *К* $\vdots a, К \vdots b. $Обозначим *НОК(a, b)= m.*

Заметим, что *m* $\vdots $ *a, m* $\vdots b.$

Предположим противное ,что *К* не делится на *m*. По теореме 4 о делении с остатком число *К* можно представить в виде $K=mq+r$, где 0 < r < m. Так как *К* $\vdots a, m \vdots a$, то и r $\vdots a$. Так как, далее, $ К \vdots b$, $m \vdots b, то и r \vdots b$. Итак,

*r* $\vdots a ,r \vdots b, следовательно,$ *r* –общее кратное чисел *a* и *b*, поэтому *r ≥ m,* вопреки условию *0 < r < m.* Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно. Значит, *К*$ \vdots $ *НОК(a, b).*

Следующие два свойства делимости являются фактически переформулировками свойства 10.

*Свойство 11*. Если $a \vdots b\_{1} и a \vdots b\_{2}, то a\vdots НОК\left(b\_{1},b\_{2}\right).$

*Свойство 12*.$ Если a \vdots с и b\vdots c, то \frac{ab}{c} $- общее кратное чисел $a и b$.

Пример 3. Доказать, что для любого натурального числа *n* справедливо соотношение $(n^{2}- 5n^{3}+4n)\vdots 120$ .

Решение. Ранее было доказано, что многочлен$ n^{2}- 5n^{3}+4n$ делится на 2, 3, 4, 5, 8. Тогда по свойству 11, он делится и на *НОК* чисел 2, 3, 4, 5, 8, т.е. на 120.

*Теорема 5*. Для любых натуральных чисел справедливо равенство

*НОК(a, b)*$ ∙НОД$ *(a, b) = a*$∙$*b* (3).

Доказательство. Введем обозначения: *НОК(a, b) = k,*$ НОД$ *(a, b) = d.* Так как *a*$∙$*b*- общее кратное чисел *a* и *b*, то, по свойству 10, $ab\vdots k, поэтому ab= kс.$

Поскольку $k\vdots a, то k=am. $Подставив выражение $am$ вместо $k$ в равенство $ab= kс$, получим $ab= amс$, т.е. $b= mс$. Это значит, что $b\vdots с.$ Аналогично можно доказать, что $a\vdots с.$ Таким образом, *с*- общий делитель чисел$ a и b$, поэтому *с* не больше их *НОД*: $c\leq d.$ Но тогда $k=\frac{ab}{c}\geq \frac{ab}{d}$. Итак,$ \frac{ab}{d} \leq k.$
С другой стороны, по свойству 12,$ \frac{ab}{d} –$ общее кратное чисел $a и b, $поэтому оно не меньше их *НОК*: $\frac{ab}{d} \geq k$.

Итак, $\frac{ab}{d} \geq k$ и в то же время $\frac{ab}{d} \leq k$. Следовательно, $\frac{ab}{d}=k$, т.е. $ab= dk,$ что и требовалось доказать

*Следствие.* Если числа $a и b$ взаимно простые, то *НОК(a, b)*$ $*= a*$∙$*b.*

*Свойство 13.* Если $a \vdots b\_{1}, a \vdots b\_{2} и числа b\_{1},b\_{2}- взаимно простые, то a\vdots b\_{1}b\_{2}.$

Доказательство. По свойству 11 если$ a \vdots b\_{1} и a \vdots b\_{2}, то a\vdots НОК\left(b\_{1},b\_{2}\right).$ Но по условию$ b\_{1},b\_{2}- взаимно простые$ числа, значит$ НОК\left(b\_{1},b\_{2}\right)=$ $b\_{1}b\_{2}$ по следствию из теоремы 6. Таким образом, $a\vdots b\_{1}b\_{2}$. Равенство (3) иногда используют для отыскания наименьшего общего кратного двух чисел.

Пример 4.Найти *НОК(276, 282).*

Решение. Числа 276 и 282 – четные и делятся на 3,значит, делятся и на 6. Поскольку 282$-$276 =6, у заданных чисел не может быть общего делителя, большего, чем 6. Итак, *НОК(276, 282) = 6*. По формуле (3) получаем:

 *НОК(276, 282)* = $\frac{276∙282}{НОД\left(276,282\right)}=\frac{276∙282}{6}=\left(276:6\right)∙282=12972.$

Ответ: *НОК(276, 282) = 12972.*

Пример 5. Найти *НОК(462, 252, 91).*

Решение. Найдем вначале *НОК(462, 252),* для этого найдем *НОД(462, 252),*

*462=252∙1+210, 252=210∙1+42, 210=****42****∙5,* следовательно *НОД(462, 252)=42,*

*НОК(462, 252)* = $\frac{462∙252}{НОД\left(462,252\right)}=\frac{462∙252}{42}=2772.$ Теперь найдем *НОК(2772, 91).*

*2772=91∙30+42, 91=42∙2+7, 42=****7****∙6, НОД(2772, 91)=7,* следовательно,

*НОК(2772, 91)* = $\frac{2772∙91}{НОД\left(2772∙91\right)}=\frac{2772∙91}{7}=36036.$

Итак, *НОК(462, 252, 91)=36036.*

Ответ: *НОК(462, 252, 91)=36036.*

Пример 6. Приведите к общему знаменателю дроби $\frac{111}{21120} и \frac{1237}{30720}$.

Решение. Для приведения дробей к общему знаменателю необходимо найти *НОК(21120,30720).* Найдем сначала *НОД(21120,30720)*, 30720=21120∙1+9600, 21120=9600∙2+1920, 9600=**1920**∙5.

*НОК(21120, 30720)* = $\frac{21120∙30720}{НОД\left(21120; 30720\right)}=\frac{21120∙30720}{1920}=337920, тогда $ дроби равны$ \frac{1776}{337920} и \frac{13607}{337920}$*.*

Ответ: $\frac{1776}{337920} и \frac{13607}{337920}$.

Для самостоятельного решения можно предложить учащимся следующие задания.

Пример7. Найти *1) НОК(645, 381);* ответ: *81915.*

2) *НОК(846, 246);* ответ: *34686*. 3) *НОК(5538, 11618);* ответ: *197506.*

Пример 8. Сложите дроби $\frac{7}{192} и \frac{187}{1620}$. Ответ: $\frac{3937}{25920.}$

Пример 9. Три теплохода заходят в порт после каждого рейса. Первый теплоход совершает рейс за 4 дня, второй – за 6, третий – за 9. Однажды они встретились в порту все вместе. Через какое наименьшее число дней они снова встретятся в порту все вместе?

Ответ: *НОК*(4, 6, 9)=36.

Пример 10. На гранях кубиков нужно написать буквы русского алфавита, по одной на каждой грани. Какое наименьшее число кубиков нужно взять, для того , чтобы все 33 буквы алфавита были написаны одинаковое количество раз и все грани кубиков были заполнены?

Решение. *НОК*(6, 33)=66, 66:6=11 кубиков.

Ответ: 11.

Пример 11. Отец и сын шли по занесенной снегом дороге друг за другом. Длина шага отца 80 см, сына− 60 см. их шаги совпали 601 раз, в том числе в самом начале и в конце пути. Какое расстояние они прошли?

Решение. *НОК*(60, 80)=240 см, 240 см=0, 24 км, 0,24∙(601−1)=1, 44 км.

Ответ: 1 км 440 м.

Пример 12. Найдите все натуральные числа *а* и *b*, где *а* $\leq $ *b*, что

*НОК*(*а*, *b*)=840 и *НОД*(*а*, *b*)=15.

Решение. *а*∙ *b*= *НОД∙ НОК, а*∙ *b*=840∙15=12600. Пусть *а=15∙m, b=15∙n,* тогда *, а∙ b=15∙m∙15∙n=225∙m∙n=12600, m∙n=56.* Если *m=*1, *n=*56, то *а=15∙m*=15, *b=15∙n*=840. Если *m=*7, *n=*8, то *а=15∙m*=105, *b=15∙n*=120. Другие случаи не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: *а=15*, *b=840; а*=105, *b*=120.

Для самостоятельного решения можно предложить учащимся следующие задания.

Пример 13. Найдите все натуральные числа *а* и *b*, если известно, что они не делятся друг на друга и *НОК*(*а*, *b*)=90 и *НОД*(*а*, *b*)=6.

Ответ: 18 и 30; 30 и 18.

Отметим еще два свойства делимости.

*Свойство 14*. Если числа $a и p взаимно простые$ и $ac\vdots p$, то$ c\vdots p$.

Доказательство. Так как $a и p взаимно простые$ числа, то *НОК*($a$, p)$ $= $a$p. По условию $ac\vdots p;$ кроме того $ac\vdots a$. Следовательно, $ac$ – общее кратное чисел $a и p$ и , по свойству 10, оно делится на *НОК*($a$, p). Таким образом, $ac\vdots ap, $откуда, по свойству 6, следует, что $c\vdots p$.

*Свойство 15*. Если$ p$ – простое число и $ac\vdots p$, то хотя бы одно из чисел $a, c$ делится на $p$.

**1.7. Основная теорема арифметики натуральных чисел**

Основной теоремой арифметики называют совокупность двух утверждений.

*Теорема 1*. Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители.

Например, 35=5$ ∙7,$ 54=2$∙3∙3∙3,$ 169=13$∙13,$ 1001=7$∙11∙13.$

*Теорема 2.*Если натуральное число разложено на простые множители, то такое разложение единственно; иными словами, любые два разложения числа на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

При разложении числа на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагают справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

Пример 1. Разложить на простые множители число: а) 3780; б) 7056.

Решение. а) Имеем:

 3780 2

 1890 2

 945 3

 315 3

 105 3

 35 5

 7 7

 1

 Итак, 3780=22$ ∙3$3 $∙5∙7.$

б) Имеем: 7056 2

 3528 2

 1764 2

 882 2

 441 3

 147 3

 49 7

 7 7

 1

Итак, 7056= 24 $∙3$ 2$∙$72.

В обоих случаях составлено *каноническое разложение*, когда простые множители располагаются в порядке возрастания. Знание канонического разложения позволяет без особого труда находить *НОД* или *НОК* заданных чисел.

Пример 2. Вычислить *НОД (3780, 7056*) и *НОК (3780, 7056).*

Решение. Так как 3780=22$ ∙3$3 $∙5∙7, $7056=24 $∙3$ 2$∙$72, то

*НОД (3780, 7056)=* 22$ ∙3$2 $∙7=252,$ *НОК (3780, 7056)=* 24 $∙3$ 3$∙$72$ ∙5$=105840.

Используя каноническое разложение числа *а* на простые множители можно выяснить вид любого делителя числа *а* и подсчитать общее число всех делителей. Например, пусть, *а=504*, тогда, *а=23*$ ∙3$*2* $∙7.$ Следовательно, каноническое разложение любого делителя *d* числа *а* на простые множители может содержать не более трех множителей, равных 2, не более двух множителей, равных 3, и не более одного множителя, равного 7. Значит, каноническое разложение любого делителя *d* числа *а* на простые множители имеет вид d=2s$∙3$r$∙7$t, где s, r, t$-$целые неотрицательные числа, причем 0$ \leq s\leq 3,$ 0$ \leq r\leq $2, 0$ \leq t\leq 1.$

Если *s=r=t=0,* то *d=20*$∙3$*0*$∙7$*0=1*;

 если *s=1,r=0,t=1,* то *d=21*$∙3$*0*$∙1$*0=14;*

если *s=2,r=2,t=1,* то *d=22*$∙3$*2*$∙$*7*1*=252.*

Числа 1, 14, 252 $– $делители числа 504. Перебирая все возможные значения показателей s, r, t, получим все делители данного числа *а.* Поскольку число s может принимать 4 различных значения (0,1, 2, 3), число r$ -$ три различных значения (0,1, 2), число $t-$ два различных значения (0,1), то общее число всех делителей числа 504 равно произведению 4$ ∙3∙2=24.$

В общем случае, если составлено каноническое разложение на простые множители натурального числа *а: а* = *p*1s1$∙ $p2s2$∙$ p3s3$∙$ p4s4 …, то любой делитель *d* числа *а* имеет вид d = *p*1r1$∙ $p2r2$∙$ p3r3$∙$ p4r4 …, где r1, r2, r3….$-$целые неотрицательные числа, причем 0$ \leq r\_{1}\leq s\_{1},$ 0$ \leq r\_{2}\leq s\_{2}$, 0$ \leq r\_{3}\leq s\_{3}….$

При этом общее число всех делителей натурального числа *а* равно произведению $\left(s\_{1}+1\right)\left(s\_{2}+1\right)\left(s\_{3}+1\right)∙…∙\left(s\_{k}+1\right).$

Пример 1. Решите в натуральных числах уравнение *х∙у=15.*

Решение. Число 15 может быть записано в виде произведения двух натуральных множителей: 15=1∙15=15∙1=3∙5=5∙3.Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности четырех систем:$ \left\{\begin{array}{c}x=1;\\y=15;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x=15;\\y=1;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x=3;\\y=5;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x=5;\\y=3.\end{array}\right.$

Ответ: (1; 15), (15; 1), (3; 5), (5; 3).

Важно обратить внимание учащихся на то, что симметричные пары чисел являются разными ответами.

Пример 2. Решите в целых числах уравнение *х∙у=15.*

К решениям примера 1 добавляются еще четыре системы.

Ответ: (1; 15), (15; 1), (3; 5), (5; 3), (−1;−15), (−15; −1), (−3;− 5), (−5;−3).

Пример 3. Решите в целых и натуральных числах уравнение *х∙(21 у −22) =0.*

Ответ: нет решений.

Пример 4. Решите в целых и натуральных числах уравнение (*х−1)( у +15) =0.*

Ответ: *(1;k) ,k*$ \in Z; $*(m;−15) ,m*$ \in Z$*;*$ $или *(1;k) ,k*$ \in N.$

Для самостоятельного решения можно предложить учащимся следующие задания.

Пример 5. Решите в целых и натуральных числах уравнения:

1) (*х−2)(xу +4)=1; 2)* (*2х+3)(у −1)=7;* 3)(*х+2010)(у −2010)=21;*

*4)*$ x^{2}-y^{2}=9;$ 5) $36x^{2}-y^{2}=27;$ 6) $x^{2}-y^{2}=2013;$ 7) (*1−х)(1+у)=2010;*

8) *(1+х)(4+21у)=603;* 9) *(х −1)(21у−10)=1331.*

Пример 6. В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых в свою очередь, в 3 раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в 2 раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой в собрании сочинений?

Решение. Пусть *x,y,z*−количество томов, содержащих соответственно художественную литературу, письма и публицистику; *k*−коэффициент пропорциональности. Учитывая, что *x+y+z*$<$20, составим систему $\left\{\begin{array}{c}x=ky;\\z=3y;\\2x=y+14.\end{array}\right.$Подставив $x=ky $и $z=3y$ в неравенство и третье уравнение системы, получим$ \left\{\begin{array}{c}\left(k+4\right)y<20,\\y\left(2k-1\right)=14.\end{array}\right. $Разложим 14 на множители: 14=1∙14=2∙7. Так как $2k-1$ число нечетное, то $2k-1$=1 или $2k-1$=7.

1) Если $2k-1$=1, то $k$=1, тогда $y=14$ и $\left(k+4\right)y=5∙14=70>20-$не удовлетворяет условию задачи.

2) Если $2k-1$=7, то $k$=4, тогда $y=2$ и $\left(k+4\right)y=8∙2=16<20-$ удовлетворяет условию задачи.

Тогда $z=3y=3∙2=6.$

Ответ: 6 томов.

Пример 7. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}$ %, и наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 104$\frac{1}{6}$ %. Определить срок хранения вклада.

Решение. Пусть по 1-ой процентной ставке вклад в банке пролежал m1 месяцев, по 2- ой процентной ставке− m2 месяцев, m3 иm4− по 3- ей и 4- ой.

Заметим, что 5% соответствуют $\frac{1}{20}$, т. е. вклад увеличивался каждый месяц в $\frac{21}{20}$ раза. 12% соответствуют $\frac{3}{25}$, т. е. вклад увеличивался каждый месяц в $\frac{28}{25}$ раз. $11\frac{1}{9}$ % соответствуют $\frac{1}{9}$, т. е. вклад увеличивался каждый месяц в $ \frac{10}{9}$ раза.

12,5 % соответствуют $\frac{1}{8}$, т. е. вклад увеличивался каждый месяц в $\frac{9}{8}$ раза. За всё время сумма вклада увеличилась на 104$\frac{1}{6}$ %, т.е. в $\frac{49}{24}$ раза. Обозначим за S первоначальную сумму денег и составим уравнение.

S$∙$ ($\frac{21}{20})^{m\_{1}}$($\frac{28}{25})^{m\_{2}}$($\frac{10}{9})^{m\_{3}}$($\frac{9}{8})^{m\_{4}}$=$\frac{49}{ 24} ∙$ S, преобразуем данное уравнение,

$$21^{m\_{1}}∙28^{m\_{2}}∙10^{m\_{3}}∙9^{m\_{4}}∙24=20^{m\_{1}}∙25^{m\_{2}}∙9^{m\_{3}}∙8^{m\_{4}}∙49.$$

Разложим числа, стоящие в левой и правой частях последнего равенства на простые множители:

$2^{2m\_{2}+m\_{3}+3}∙3^{m\_{1}+2m\_{4}+1}∙5^{m\_{3}}∙7^{m\_{1}+m\_{2}}$*=*$2^{2m\_{1}+3m\_{4}}∙3^{2m\_{3}}∙5^{m\_{1}+2m\_{2}}∙7^{2}$*.*

По основной теореме арифметики, всякое натуральное число разлагается на произведение простых сомножителей единственным образом. Это означает, что показатели степеней при одинаковых основаниях совпадают: $\left\{\begin{array}{c}2m\_{2}+m\_{3}+3=2m\_{1}+3m\_{4},\\m\_{1}+2m\_{4}+1=2m\_{3},\\m\_{3}=m\_{1}+2m\_{2},\\m\_{1}+m\_{2}=2.\end{array}\right.$Решая эту систему, получаем, $m\_{1}=1, m\_{2}=1, m\_{3}=3, m\_{4}=2.$ $m\_{1}+m\_{2}+m\_{3}+m\_{4}=7.$

Ответ: вклад хранился 7 месяцев.

Для самостоятельного решения можно предложить учащимся следующие задания.

Пример 8. Определите целые числа m, n, k, p, для которых справедливо равенство:

1) $ 2^{m+n}∙3^{k+1}∙5^{7}∙7^{12}$*=*$2^{7-n}∙3^{7}∙5^{m+p}∙7^{m+n+k}$*.*

2)$ 2^{p-m}∙3^{p}∙75^{n}∙7^{m+4}$*=*$21^{k}∙27∙5^{p}∙14^{n}∙2^{m}$*.*

**II. Диофантовы уравнения (10 часов).**

**2.1 Диофантовы уравнения первой степени**

В наши дни каждый, кто занимался математикой как профессионал или как любитель, слышал о диофантовых уравнениях и даже о диофантовом анализе. За последние 15–20 лет эта область сделалась «модной» благодаря своей близости к алгебраической геометрии.

Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, решаемые во множестве целых (реже рациональных) чисел, вошли в историю математики как ***диофантовы.*** Наиболее интересными являются *линейные диофантовы уравнения* или их системы, т. е. такие, в которых количество переменных больше числа уравнений. Наиболее изучены диофантовы уравнения 1 и 2 степени.

 *Определение*. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида ax+by=c, где x и у – переменные, а, b и с – некоторые числа.

*Определение.* Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Данное уравнение может иметь сколько угодно решений. Для решения уравнения достаточно взять любое значение x и найти соответствующее ему значение y. $ у=\frac{с}{b}-\frac{а}{b}х$

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая линия. Данное уравнение имеет бесконечно много решений.

*Определение*: Неоднородным диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными x, y называется уравнение вида *ах + by = c*, (1) где *а, b, c, х, y*Z, *c* 0.

Существует несколько способов решения данных уравнений. Рассмотрим *способ перебора вариантов*.

Задача 1. Найти множество всех пар натуральных чисел, которые являются решениями уравнения 49х + 51у = 602.

Решение. Выразим из уравнения переменную х через у: х =, так как х и у – натуральные числа, то х =   602 - 51у ≥ 49, 51у≤553, 1≤у≤10.Полный перебор вариантов показывает, что натуральными решениями уравнения являются числа х=5, у=7. Ответ: (5;7).

Задача 2. Несколько детей собирали яблоки. Каждый мальчик собрал по 21 кг, а девочка по 15 кг. Всего они собрали 174 кг. Сколько мальчиков и сколько девочек собирали яблоки?

Решение. Пусть мальчиков x N, а девочек y N, то можно составить уравнение 21x + 15y = 174. $x=\frac{174-15y}{21}\geq 1, 174-15y\geq 21,$ $y\leq 10,2.$ Полный перебор вариантов показывает, что натуральными решениями уравнения являются числа х=4, у=6. Ответ: 4- мальчика, 6- девочек.

Задача 3. Андрей работает летом в кафе. За каждый час ему платят 10 рублей. И высчитывают 2 рубля за каждую разбитую тарелку. На прошедшей неделе он заработал 180 рублей. Определите, сколько часов он работал и сколько разбил тарелок, если известно, что он работает не более 3 часов в день.

Решение. Пусть *x* часов он всего работал в неделю, тогда *10х* рублей ему заплатили, но он разбил *у* тарелок, и с него вычли *2у* рублей. Имеем уравнение *10х – 2у =180*, причем *x* $\leq $21. Получим: *5х-у=90, 5х=90+у, х=18+у:5.* Так как *x* целое число, то *у* должно нацело делится на 5, чтобы в правой части получилось целое число. Возможны четыре случая:

1. у=0, х=18, т. е. решением является пара – (18, 0);
2. у=5, х=19, (19, 5);
3. у=10, х=20, (20, 10);
4. у=15, х=21, (21, 15).

Ответ: (18, 0); (19, 5); (20, 10); (21, 15).

Задача 4. Из двухрублевых и пятирублевых монет составлена сумма в 23 рубля. Сколько среди этих монет двухрублевых?

Решение. Пусть *x* – количество двухрублевых монет, *у –* количество пятирублевых монет. Составим и решим уравнение:2х+5у=23; 2х=23–5у; x = (23 – 5у):2; x = 11 + (1 – 5у):2.

Так как *x* и *y* натуральные числа по условию задачи, то левая и правая части уравнения должны быть натуральными числами, (1 – 5у) $\vdots $ 2. Осуществим перебор вариантов.

1. y=1, х=9, то есть двухрублевых монет может быть 9;
2. у=2, при этом выражение (1 – 5у) не делится нацело на 2;
3. у=3, х=4, то есть двухрублевых монет может быть 4;
4. при у $\geq $ 4, значение x не является числом натуральным.

Ответ: 9; 4.

Остальные задачи можно найти в Приложении 1.

*Решение диофантовых* уравнений ах + by = c (1*), где а, b, c, х, yZ, c *0 *с использованием алгоритма Евклида.*

Если с не делится нацело на НОД(а;b), то уравнение не разрешимо в целых числах. В этом случае, НОД (а;b)$\ne $1, тогда число стоящее слева делится на НОД (а;b), а стоящее справа - нет.

Пример 1. 34x – 17y = 3.

НОД (34; 17) = 17, 3 не делится нацело на 17, в целых числах решения нет.

Пусть с делится на НОД(а;b). Делением всех коэффициентов можно добиться, что НОД(а;b)=1 (а и b- станут взаимно простыми). Тогда это уравнение имеет по крайней мере одно решение ($x\_{0}; y\_{0})$. А общее уравнение имеет вид:

$\left\{\begin{array}{c}x=x\_{0 }+bn,\\y=y\_{0}-an;\end{array}\right.$ где ($x\_{0}; y\_{0})$ – частное решение уравнения (1), n Z*.*

Прием нахождения наибольшего общего делителя представляет собой алгоритм Евклида.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух чисел надо:

1) большее из двух чисел разделить на меньшее;

2) меньшее из чисел на остаток при первом делении;

3) остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка. Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД двух данных чисел

 Пример2. *Найти НОД (645; 381).*

Решение. Разделим с остатком 645 на 381. Мы получим: 645=381·1+264.

Далее разделим с остатком 381 на 264, получим: 381=264·1+117.

Теперь разделим с остатком 264 на 117, получим: 264=117·2+30.

Продолжим процесс деления, разделим с остатком 117 на 30, получим: 117=30·3+27. Далее, 30=27·1+3. Следующий шаг – делим 27 на 3, получаем, что 27=3·9 +0, т. е. 27 делится на 3 без остатка. Значит, наибольший общий делитель чисел 27 и 3 равен 3, следовательно, и наибольший общий делитель чисел 645 и 381 равен 3, т. е. последнему отличному от нуля остатку.

Таким образом, НОД (645; 381) = 3.

Пример 3. Решить уравнение на множестве целых чисел 7х+11у=69.

Решение. НОД(7;11)=1, найдем частное решение уравнения, применив алгоритм Евклида к числам 11 и 7:11=7∙1+4, 7=4∙1+3, 4=3∙1+1.

Т. к. в остатке 1, то выразим последний ненулевой остаток. 1=4−3∙1, из второго равенства выразим остаток 3=7−4∙1 и подставим в предыдущее равенство: 1=4−3∙1=4−(7−4∙1) ∙1=4−7∙1+4∙1=4∙2−7∙1. Из первого равенства выразим остаток 4=11−7∙1 и подставим в предыдущее: 1=(11−7∙1) ∙2−7∙1=11∙2−7∙3. Получаем: 1=11∙2−7∙3, следовательно х0 = –3, у0=2. Запишем общее решение уравнения на множестве целых чисел:$ \left\{\begin{array}{c}x=69∙\left(-3\right)+11n,\\y=69∙2-7n;\end{array}\right.$ все решения уравнения имеют вид: $ \left\{\begin{array}{c}x=-207+11n,\\y=138-7n.\end{array}\right.$

 Пример 4. Для газификации жилого дома требуется проложить газопровод протяженностью 150 м. Имеются трубы 13 м и 9м длиной. Сколько требуется труб, чтобы не приходилось их разрезать при прокладке газопровода.

Решение. Пусть требуется *x* труб по 9 м, и у труб по 13м. Составим и решим уравнение: 9х+13у=150. НОД(9;13)=1, уравнение разрешимо во множестве целых чисел.

Найдем значение х0 и у0 , применив алгоритм Евклида к числам 13 и 9:

13=9∙1+4, 9=4∙2+1. Выразим последний ненулевой остаток 1=9−4∙2, из второго равенства выразим остаток 4=13−9∙1 и подставим в предыдущее равенство: 1=9−4∙2=9−(13−9∙1) ∙2=9−13∙2+9∙2=9∙3−13∙2, х0 = 3, у0=−2.

Запишем общее решение уравнения:$ \left\{\begin{array}{c}x=150∙3+13n,\\y=150∙(-2)-9n;\end{array}\right.$

$$ \left\{\begin{array}{c}x=450+13n,\\y=-300-9n.\end{array}\right.$$

Так как *x* и *y* неотрицательные целые числа, то чтобы найти значение *n,* решим систему неравенств:$ \left\{\begin{array}{c}450+13n\geq 0,\\-300-9n\geq 0;\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}n\geq -34,6,\\n\leq -33,3.\end{array}\right.$

 *n*=−34, $ \left\{\begin{array}{c}x=8,\\y=6.\end{array}\right.$

Ответ: для прокладывания газопровода потребуется 8 труб длиной по 9м и 6 труб длиной по 13м.

Пример 5. Решите в целых числах уравнение 3х+2у=7.

Решение. Подставим вместо х остатки от деления на коэффициент при у, т.е. на 2. Если подставить х=0, значение у получается не целым, а если подставить х=1, то у=2. Пара (1;2)- частное решение уравнения. Общее решение имеет вид:$ \left\{\begin{array}{c}x=1+2n,\\y=2-3n, n\in Z.\end{array}\right.$

Геометрически решения уравнения –это координаты целочисленных точек, через которые проходит прямая, задаваемая этим уравнением.

Пример 6*.* Транспортные организации имеют в наличие машины вместимостью 3, 5 т и 4, 5 т. Следует перевезти груз весом 53 т. Сколько машин нужно взять для одного рейса?

Решение. Пусть x машин по 3,5 т.; у машин по 4, 5 т. Составим и решим уравнение: 3,5х+4,5у=53. Перейдем к уравнению с целыми коэффициентами, например, умножим обе части уравнения на 2. Получим: 7х+9у=106.

НОД(7, 9)=1, уравнение имеет целые решения.

9=7∙1+2, 7=2∙3+1.

1=7−2∙3=7−(9−7∙1) ∙3=7∙4+9∙(−3), х0 = 4, у0=−3.

Общее решение имеет вид:$ \left\{\begin{array}{c}x=106∙4+9n,\\y=106∙\left(-3\right)-7n;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x=424+9n,\\y=-318-7n;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}424+9n\geq 0,\\-318-7n\geq 0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}n\geq -47\frac{1}{9},\\n\leq -45\frac{3}{7},\end{array}\right.$  *n*=−46, −47.

Получим решение:

**

Таким образом, для одного рейса можно взять: 1 машину вместимостью 3,5 т и 11 машин вместимостью 4,5 т; или 10 машин вместимостью 3,5 т и 4 машины вместимостью 4,5 т.

Полезно обратить внимание на наиболее эффективный вариант для предприятия с экономической точки зрения.

Рассмотрим решение неоднородного диофантова уравнения первого порядка с большим количеством неизвестных.

Пример 7. Школа получила 1 млн. руб. на приобретение 100 единиц учебного оборудования (на всю сумму без сдачи). Администрации школы предложили, оборудование стоимостью 3000, 8000 и 12000 руб. за единицу. Сколькими способами школа может закупить это оборудование. Укажите один из способов.

Решение.

Пусть приобретено *x* единиц оборудования по 12000 руб., *y* единиц оборудования по 8000 руб., *z* единиц оборудования по
3000 руб.

Всего приобретено 100 единиц оборудования, т.е. *x+ y + z = 100*, причем на приобретение 100 единиц оборудования затрачено 1 млн. руб., т.е.

*12000 x + 8000 y + 3000 z = 1 000 000,*

*12x + 8y + 3z = 1000*.

Таким образом, получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными:
 , *x>0, y>0, z>0*.

Исключим переменную *z*, путем вычитания из второго уравнения первого, умноженного на 3. Следовательно, получаем диофантово уравнение 1-ой степени с двумя неизвестными *9 x+ 5 y = 700.*

Его можно решить, используя алгоритм Евклида.

Одно из частных решений задачи: *x=65*, *y=23, z=12*, т.е. школа на 1 млн. рублей может приобрести 65 единиц оборудования по 12 тыс. руб., 23 единицы оборудования по 8 тыс. руб., 12 единиц оборудования по 3 тыс. рублей.
Пример 8. Решите уравнение 6x+10y+15z=7 в целых числах.

Решение. Преобразуем уравнение (6x+10y)+15z=7, 2(3x+5y)+15z=7.

Пусть 3x+5y=t, 2t+15z=7. Согласно алгоритму Евклида, имеем

15=7∙2+1, 7=7∙1, НОД(15;2)=1.

1=2∙(-7)+15∙1, т.е. частное решение t0=-49, z0=7. Находим t=-49+15u,

 z=7-2u, где u$\in $Z. Имеем 3x+5y=-49+15u. По алгоритму Евклида подберём частные решения (30u-98; 49-15u). Значит решением уравнения являются числа x=30u-98+5v, y=49-15u-3v, z=7-2u, где u$,$ v$\in Z.$ (6)

Пример 9. Сколько можно купить на *100* монет петухов, кур и цыплят, если всего надо купить *100* птиц, причём петух стоит *5* монет, курица – *4*, а *4* цыплёнка – одну монету?

Решение. Пусть *x* – искомое число петухов, *у* – кур, а *4z* – цыплят. Составим систему уравнений, которую надо решить в целых неотрицательных числах.



Умножив первое уравнение системы на *4* , а второе – на *(-1)* и, сложив результаты, придём к уравнению *-x + 15z = 300* с целочисленными решениями *x = -300 + 15t*, *z = t*. Подставляя эти значения в первое уравнение, получим *y = 400 - 19t*. Значит, целочисленные решения системы имеют вид

*x = -300 + 15t*, y *= 400 - 19t, z = t*.

Из условия задачи вытекает, что

 ****откуда , т. е. *t = 20* или *t = 21*.

*Решение диофантовых уравнений с использованием цепной дроби.*

**Понятие цепной дроби.**

Любую дробь *a/b* можно записать в виде суммы целой части и правильной дроби: , тогда

, значит  .

Продолжим этот процесс до тех пор, пока не придём к знаменателю *qп*

В результате мы представим обыкновенную дробь *a/b* в следующем виде: . Дробь, стоящую в правой части равенства называют *цепной или непрерывной*. Ввиду громоздкости развёрнутой записи цепной дроби применяют компактную запись *a/ b =*  *[q0; q1, q2, …, qп]*.

Например, .

Очевидно, что любое рациональное число, и только оно записывается в виде конечной цепной дроби. Иррациональным числам соответствуют бесконечные цепные дроби.

 Если при построении цепной дроби остановиться на знаменателе *qk*, то получиться дробь *[q0; q1, q2, …, qк]*, которую называют *к-й подходящей дробью* для искомой иобозначают  Найдем вид некоторых подходящих дробей:

****

Для рационального числа *a / b* последовательность подходящих дробей конечна, и ее последний элемент  Нетрудно заметить, что имеют место следующие рекуррентные соотношения:



Вернемся к уравнению:  *ax + by = c* . Напомним, что в нем *a* и  *b* взаимно просты. Решение этого уравнения «способом цепной дроби» завершается применением готовых формул *(доказательство которых можно найти в специальных пособиях),* представляющих общее решение данного уравнения



Пример 10. Решить уравнение *44х+13у=5.*

Решение.Так как , то *n=4.* Составим «подходящие дроби»

**

Найдем *P3* и *Q3* используя формулы: *P3=10+7=17, Q3=3+2=5.*

Общее решение уравнения будет иметь вид: *х=-25+13t, y=85-44t,* где *t* – целое число.

Для решения уравнения **** (1), где *a, b, c – целые коэффициенты,* способом «цепной дроби» нужно:

1. Представить дробь *a/b* в виде конечной цепной дроби;
2. Записать дробь *a/b= (q0; q1,q2,...,qn);*
3. Составить таблицу для нахождения значений числителя и знаменателя подходящих дробей  для полученной цепной дроби, последняя подходящая дробь 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальные условия | *q0* | *q1* | *q2* | ... | *qn* |
| *Pi* | *1* | *q0* | *q0 q1+1* | *(q0 q1+1) q2+ q0* |  | *a* |
| *Qi* | *0* | *1* | *q1* | *q2 q1+1* |  | *b* |

1. Найдем решение уравнения по следующим формулам



Пример. Рассмотрим пример 4 с использованием цепной дроби, т.е. решим диофантово уравнение: *9х+13у=150*.

Решение. 1.Представим дробь 9/13 в виде конечной цепной дроби.



2. Запишем дробь в виде цепной дроби 9/13=[0;1,2,4]

3. Составим таблицу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальные условия | q0=0 | q1=1 | q2=2 | q3=4 |
| Pi | 1 | 0 | 1 | 2 | 9 |
| Qi | 0 | 1 | 1 | 3 | 13 |

4. Запишем общее решение уравнения:


Как и в решении способом с использованием алгоритма Евклида, мы получили такой же вид общего решения. А частное решение задачи выражается той же парой чисел: (8;6).

Пример11. Крестьянка несла на базар корзину яиц. Неосторожный всадник, обгоняя женщину, задел корзину, и все яйца разбились. Желая возместить ущерб, он спросил у крестьянки, сколько яиц было в корзине. Она ответила, что число яиц не знает, но когда она раскладывала их по *2*, по *3*, по *4*, по *5* и по *6*, то каждый раз одно яйцо оставалось лишним, а когда она разложила по *7*, лишних яиц не осталось. Сколько яиц несла крестьянка на базар?

Решение**.** Пусть *x* – число яиц. Так как (*x – 1)* делится на *2*, на *3*, на *4*, на *5*, на *6*, то оно делится на их НОК, равное *60*. Значит, *x* имеет вид *60у + 1*.

Поэтому для ответа на вопрос задачи надо решить в натуральных числах уравнение *60у + 1 = 7z*, или *7z – 60у=1.*

С использованием цепной дроби получаем, что целочисленные решения уравнения имеют вид *у = -2 + 7t*, *z = -17 + 60t*, где *t* – любое целое число.

Наименьшее положительное решение получаем при *t = 1*. В этом случае *у = 5*, *z = 43*. Итак, крестьянка несла на базар *301* яйцо.

Ответ*.* Крестьянка несла на базар *301* яйцо.

*Способ рассеивания (размельчения)* впервые применил в начале VI в. индийский математик Ариабхатта. Метод заключается в сведении данного уравнения к последовательности других уравнений с убывающими по абсолютной величине коэффициентами перед неизвестными.

Продемонстрируем его на примере решения следующей задачи.

Пример12. Найти два числа, если разность произведений первого на 19 и второго на 8 равна 13.

Решение.Требуется решить уравнение *19х — 8у = 13*

Перепишем его иначе: *8y=19x–13; 8y=16x+3x–13; у = 2х + *

и обозначим *y1 = у — 2х.*

В результате уравнение примет вид *8у1 = Зx — 13* или *x= 2y1.*

Если вновь произвести замену *х1 = x — 2у1,* то придем к уравнению

*3xl — 2у1* = *13*.

Заметим, что коэффициенты при неизвестных уменьшились — измельчились. Продолжим дальнейшее их уменьшение: так как *y1 = xl +,* то положим *у2 =у1 –х1.*

В результате последнее уравнение преобразуется к виду *х1 — 2у2*: = *13.* Здесь коэффициент при *х1*, равен 1, а поэтому при любом целом *у2 = t* число *х1* тоже целое.

Остается выразить исходные переменные через *t:*

*вначале выразим х1=2t+13, y1 = 3t+13; а затем x* = *8 t* +*39*, *y= 19 t* *+ 91*.

Итак, получаем бесконечную последовательность (*39 + 8 t, 91 + 19 t*) целочисленных решений**.**

Нетрудно заметить, что методы цепных дробей и рассеивания являются лишь другой формой применения алгоритма Евклида. (Шибасов)

Пример 13. Решить способом измельчения уравнение5x + 8y = 39.
 Решение.Выберем неизвестное, имеющее наименьший коэффициент, и выразим его через другое неизвестное: *x = (39 – 8y):5*.

Выделим целую часть: *x = 7 –y + (4 – 3y):5.*

Все число будет целым, если целым окажется значение *(4 – 3y):5*.

 Это возможно тогда, когда число (*4 – 3y)* без остатка делится на 5. Вводя дополнительную целочисленную переменную *z*, последнее уравнение запишем в виде: *4 –3 y = 5z.*

Мы пришли к уравнению такого же типа, как и исходное уравнение, но уже с меньшими коэффициентами. Решать его уже нужно относительно переменных *y и z.*

*y= (4 – 5z):3 = 1- z + (1 – 2z):3, u=y+z-1=(1-2z):3.*

Аналогично рассуждая, запишем *(1-2z)* через новую целочисленную переменную *и: 1–2z=3u*

 *z = (1–3u):2=(1– u):2 – u;
1– u=2v, v= z+u.*

*u=1 –2v* - дробей больше нет, спуск закончен.

 Теперь необходимо «подняться вверх». Выразим через переменную *v* сначала *z*, потом *y* и затем *x.*
 *z=(1– u):2 –u=(1–1+2v):2–1+2v=3v-1,
 z=3v-1.*

*y= (4–5z):3 = (4 -5(3v -1)):3=3-5v,
y=3-5v.
 x= (39–8y):5=(39–8(3–5v)):5=3+8v,
x=3+8v.*

 Формулы *x=3+8v, y=3-5v* представляют общее решение исходного уравнения в целых числах.

 Если необходимо получить только натуральные числа, то среди
всех целых решений нужно выбрать такие, для которых *x>0, y>0*, то есть
 *3+8v>0,3-5v>0.*Совместно эти неравенства могут выполняться лишь при *v=0*. В этом случае
*x=3, y=3.*

Ответ: (3;3).

Пример 14. Решить в целых числах уравнение *29х + 13у + 56z = 17*(1)

Решение. Выразим неизвестное, коэффициент при котором наименьший, через остальные неизвестные.

 *y = (17–29х-56z):13= (1–2x–4z) + (4–3x–4z):13* (2)

Обозначим *(4–3x–4z):13 = t1* (3)

 Из (2) следует, что *t1* может принимать только целые значения. Из (3) имеем *13t1 + 3x + 4z = 4* (4)

Получим новое диофантово уравнение, но с меньшими, чем в (1) коэффициентами. Применим к (4) те же соображения:

*x= (4–13t1–4z):3= (1–4t1 -– z) + (1–t1 –z):3*

*(1– t1–-z):3 = t2 , t2* – целое,  *3t2+ t1+z = 1* (5)

В (5) коэффициент при *z* – неизвестном исходного уравнения равен *1* – это конечный пункт «спуска». Теперь последовательно выражаем *z*, *x*, *y* через *t1* и *t2*.

**⎧***z = -t1 – 3t2 + 1,*

**⎨***x = 1 – 4t1 + t1 + 3t2 – 1 +t2 = – 3t1 + 4t2,*

**⎩***y = 1 + 6t1 – 8t2 + 4t1 + 12t2 – 4 + t1= 11t1 + 4t2 – 3*

Итак, **⎧***x = -3t1 + 4t2,*

 **⎨***y = 11t1 + 4t2 – 3,*

 **⎩***z = -t1 – 3t2 + 1*

*t1, t2*  – любые целые числа, определяющие все целые решения уравнения исходного уравнения.

Можно предложить учащимся найти частные решения данного уравнения, например, пусть *t1 =1, t2*  = *2. Имеем, х=5; у=16, z= – 6.*

Пример 15. Решим уравнение *3х+5у=1001*различными способами.

1. *С помощью алгоритма Евклида*

НОД(3,5)=1, уравнение имеет целые решения.

**

Получаем, что всего 67 целых значений переменной *t* содержится в указанном промежутке.

Например, при t= –335, получим

у = -1001 +1005 =4; x =2002 – 1675 = 327, т. е. решение (327; 4).

1. *С использованием цепной дроби.*

Решение.

1. Представим дробь 3/5 в виде конечной цепной дроби.



1. Запишем дробь в виде цепной дроби 3/5=[0;1, 1, 2]
2. Составим таблицу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальные условия | q0=0 | q1=1 | q2=1 | q3=2 |
| Pi | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| Qi | 0 | 1 | 1 | 2 | 5 |

1. Запишем общее решение уравнения:

Получили решение того же вида. С учетом условия, что корни уравнения натуральные, имеем те же значения для переменной t.

1. *Способ измельчения (рассеивания).*

Перепишем уравнение иначе: *x = – y + * и обозначим *xl = у + x*

 В результате уравнение примет вид *3х1 = 1001 – 2у*  или

*у = –xl .*

 Если вновь произвести замену *у1 = у + х1,* то придем к уравнению

*x1 + 2у1* = *1001*. Заметим, что коэффициенты при неизвестных уменьшились — измельчились.

 Здесь коэффициент при *x1*, равен 1, а поэтому при любом целом *у1 = t* число *х1* тоже целое. Остается выразить исходные переменные через *t:*

 *х1* = 1001 – 2 *t*, следовательно, *у = – 1001 + 3 t* , а *x = 2002 – 5 t.*  Итак, получаем бесконечную последовательность (*2002 – 5 t , – 1001 + 3 t*) целочисленных решений**.** Внешний вид формул для нахождения значений переменных отличается от решений, полученных ранее, но с учетом условия задачи, корни получаются те же самые. Так, пара (332;1) получается при *t* = =334.

Дополнительные задачи можно найти в Приложении 1.

**2.2 Нелинейные диофантовы уравнения.**

Наряду с неопределенными уравнениями первой степени большой интерес представляет исследование разрешимости в целых числах нелинейных диофантовых уравнений. Диофант наряду с линейными уравнениями рассматривал квадратные и кубические неопределенные уравнения. Решение их, как правило, сложно. Рассмотрим такой случай, когда в уравнениях можно применить формулу разности квадратов или другой способ разложения на множители.

Пример 1. Найти все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

Решение. Запишем условие задачи в виде уравнения $n^{2}-k^{2}=55$ или

*(n-k)(n+k)=*55. Так как *n+k*$ >0$*,* то *n-k*$ >0$*,* причем *n+k*$ >$ *n-k*$ $. Поскольку 55=1$∙55=5∙11,$ то возможны два случая$ \left\{\begin{array}{c}n-k=1,\\n+k=55; \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}n-k=5,\\n+k=11. \end{array}\right.$ Решая эти уравнения ,получим два ответа: *n =* 28*, k =* 27 *и n =* 8*,k =* 3.

Ответ: (28; 27), (8; 3).

Пример 2.Решите в натуральных числах *x2 – 4·x·y – 5y2 = 1996.*

Решение**.** Перепишем уравнение в виде *(x2 - 4ху+ 4y2) – 9y2=1996,*

*(х-4у)2 – 9y2=1996.*

Разложим левую часть на множители *(x – 5y)(x + у) = 1996*.

Разложим число 1996 на целые множители:

*1996=1 · 1996=2 · 998=4 · 499= -1 · (-1996)= -2 · (-998) = -4 · (-499).*

Так как *x ∈ N*, *y∈N*, то *(x + у) ∈ N*, причём *(x + у) > 1*.

Если *(x + у)∈N* и *(x + у)(x – 5у) = 1996*, то *(x – 5у) ∈ N*.

Тогда решение получившегося уравнения сводится к решению следующих систем:

 1) 

решений в натуральных числах нет

2)  или 

системы решений в натуральных числах не имеют

3)  или 

 *(832; 166)*решения в натуральных числах нет

Ответ:*x* = 832, *у* = 166.

Пример 3. Решить уравнение в целых числах х2 + 23 = у2.

Решение. Перепишем уравнение в виде: у2 - х2 = 23, (у - х)(у + х) = 23

Так как х и у – целые числа и 23 – простое число, то возможны случаи:

   

Решая полученные системы, находим:

   

Ответ: (-11;12);(11;12);(11;-12);(-11;-12).

Пример 4. Найдите все целочисленные решения уравнения

х2 - 6ху + 13у2 = 29.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделив полный квадрат,

х2 - 6ху + 13у2 = (х2 - 6ху + 9у2) + 4у2 = (х - 3у)2 + (2у)2 = 29, значит (2у)2  29.

 y= 0; .

Если у = 0, то (х - 0)2 = 29 -нет решений в целых числах.

 Если у = -1, то (х + 3)2 + 4 = 29, (х + 3)2 = 25, х + 3 = 5, х=2 или х + 3 = -5, х=-8.

Если у = 1, то (х - 3)2 +4 =29, (х - 3)2 =25, х – 3 = 5 или х – 3 = -5,т.е. х = 8 или х = -2.

Если у = -2, то (х + 6)2 + 16 = 29, (х + 6)2 = 13. Нет решений в целых числах.

Если у=2, то (х-6)2+16=29, (х-6)2=13. Нет решений в целых числах.

Ответ: (2;-1); (-8;-1); (8;1); (-2;1).

Рассмотрим уравнение второй степени с тремя неизвестными *х2 + у2= z2*. Уравнения такого вида называют уравнением Пифагора. Каждая тройка целых чисел (*х, у, z*), удовлетворяющая этому уравнению носит название *пифагоровой тройки.*

 Геометрически решение этого уравнения в целых числах можно истолковать как нахождение всех пифагоровых треугольников, т.е. прямоугольник треугольников, у которых и катеты *х, у* и гипотенуза *z* выражаются целыми числами.

По формуле *х = uv*, *y =, z =,* где *u* и *v* – нечетные взаимно простые числа (*u > v* > 0) можно найти те решения уравнения *х2 + у2 = z2*, в которых числа *х, у* и *z* не имеют общих делителей (т.е. взаимно простые).

Для начальных значений *u* и *v* формулы приводят к следующим часто встречающимся равенствам:

 32 + 42 = 52 (*u* = 1, *v* = 3), 52 + 122 = 132 (*u* = 1, *v* = 5), 152 + 82 = 172 (*u* = 3, *v* = 5), $7^{2}+24^{2}=25^{2}$, $ 51^{2}+140^{2}=149^{2}, 42^{2}+40^{2}=58^{2}…$

Все остальные целые положительные решения этого уравнения получатся умножением решений, содержащихся в формулах, на произвольный общий натуральный множитель *а*.

**2.3 Методы решения нелинейных диофантовых уравнений.**

Существуют различные методы решения нелинейных диофантовых уравнений. Перечислим их все, но в данном элективном курсе рассмотрим лишь некоторые из них.

1. Метод разложения на множители:
* вынесение общих множителей за скобку;
* применение формул сокращенного умножения;
* способ группировки;
* разложение квадратного трехчлена;
* использование параметра.

 2. Метод решения относительно одной переменной:

* выделение целой части;
* использование дискриминанта (неотрицательность);
* использование дискриминанта (полный квадрат).

3. Метод оценки:

* использование известных неравенств;
* приведение к сумме неотрицательных выражений.

4. Метод остатков.

5. Метод «спуска»:

* метод конечного «спуска»;
* метод бесконечного «спуска».

6. Метод доказательства от противного.

7. Функционально - графический метод.

***Метод разложения на множители.***

*Вынесение общих множителей за скобку.*

Пример1. Решить в целых числах уравнение $2x^{3}+xy-7=0.$

Решение. Приведем данное уравнение к виду $x\left(2x^{2}+y\right)=7.$

Т.к. 7=1∙7=7∙1= −1∙(−7)=−7∙(−1), то рассмотрим четыре системы уравнений: 1) $\left\{\begin{array}{c}x=1,\\2x^{2}+y=7;\end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{c}x=-1,\\2x^{2}+y=-7;\end{array}\right.$ 3) $\left\{\begin{array}{c}x=7,\\2x^{2}+y=1;\end{array}\right.$ 4) $\left\{\begin{array}{c}x=-7,\\2x^{2}+y=-1.\end{array}\right.$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: (1;5), (-1; -9), (7; -97), (-7; -99).

Учащимся можно предложить несколько примеров для закрепления данного метода. Решить в целых числах уравнение:$ $

$1)7xy+4y^{2}$=11; 2) $21xy-22x=0;$3) $\left(1-x\right)\left(1+y\right)=2010.$

*Применение формул сокращенного умножения.*

Пример 1.Решите в натуральных числах *x2 – 4·x·y – 5y2 = 1996.*

Решение**.** Перепишем уравнение в виде *(x2 - 4ху+ 4y2) – 9y2=1996,*

*(х-4у)2 – 9y2=1996.*

Разложим левую часть на множители *(x – 5y)(x + у) = 1996*.

Разложим число 1996 на целые множители:

*1996=1 · 1996=2 · 998=4 · 499= -1 · (-1996)= -2 · (-998) = -4 · (-499).*

Так как *x ∈ N*, *y∈N*, то *(x + у) ∈ N*, причём *(x + у) > 1*.

Если *(x + у)∈N* и *(x + у)(x – 5у) = 1996*, то *(x – 5у) ∈ N*.

Тогда решение получившегося уравнения сводится к решению следующих систем:

 1) 

решений в натуральных числах нет

2)  или 

системы решений в натуральных числах не имеют

3)  или 

 *(832; 166)*решения в натуральных числах нет

Ответ:*x = 832, у = 166.*

Пример 2. Найдите все целочисленные решения уравнения: *х2 - 6ху + 13у2 = 29.*

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделив полный квадрат,

*х2 - 6ху + 13у2 = (х2 - 6ху + 9у2) + 4у2 = (х - 3у)2 + (2у)2 = 29,* значит *(2у)2  29.*

Получаем, что у может быть равен 0; .

1. *у = 0, (х - 0)2 = 29*. Не имеет решений в целых числах.

2. *у = -1, (х + 3)2 + 4 = 29, (х + 3)2 = 25, х + 3 = 5* или *х + 3 = -5 , х=2*  или *х=-8.*

3*. у = 1, (х - 3)2 +4 =29, (х - 3)2 =25, х – 3 = 5* или *х – 3 = -5, х = 8* или *х = -2.*

4. *у = -2, (х + 6)2 + 16 = 29, (х + 6)2 = 13*. Нет решений в целых числах.

5. *у=2, (х-6)2+16=29, (х-6)2=13.* Нет решений в целых числах.

Ответ: *(2;-1); (-8;-1); (8;1); (-2;1).*

*Способ группировки.*

Пример 1. Решить в целых числах уравнение $xy+3x-y=6$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x\left(y+3\right)-\left(y+3\right)=3$ или $\left(x-1\right)\left(y+3\right)=3.$Так как 3=1∙3=3∙1= −1∙(−3)=−3∙(−1), то рассмотрим четыре системы уравнений: 1) $\left\{\begin{array}{c}x-1=1,\\y+3=3;\end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{c}x-1=3,\\y+3=1;\end{array}\right.$ 3) $\left\{\begin{array}{c}x-1=-1,\\y+3=-3;\end{array}\right.$

4)$ \left\{\begin{array}{c}x-1=-3,\\y+3=-1.\end{array}\right.$ Из каждой системы получаем решения.

Ответ: (4; −2), (−2; −4), (2; 0), (0; −6).

Пример 2. Найти два целых числа, произведение которых равно их сумме.

Решение. Составим уравнение по условию: $xy=x+y$. Выполним следующие преобразования. $xy-y=x, y\left(x-1\right)=x, y\left(x-1\right)=x-1+1, y\left(x-1\right)-\left(x-1\right)=1, \left(y-1\right)\left(x-1\right)=1$. Решением полученных систем являются две пары чисел.

Ответ: (2; 2), (0; 0).

Учащимся можно предложить решить в целых числах уравнение $x^{2}-3xy+2y^{2}$=11способом группировки и выделением полного квадрата трехчлена.

*Разложение квадратного трехчлена.*

Пример 1. Решить в целых числах уравнение $x^{2}-3xy+2y^{2}$=11.

Решение. Решим квадратное уравнение $x^{2}-3xy+2y^{2}=0$ относительно переменной $x=\frac{3y\pm \sqrt{9y^{2}-8y^{2}}}{2}$, $ x\_{1}=y, x\_{2}=2y.$

Тогда получаем *(х− у)(х−2у)=11.*

Так как 11=1∙11=11∙1= −1∙(−11)=−11∙(−1), то рассмотрим четыре системы уравнений: 1) $\left\{\begin{array}{c}x-y=1,\\x-2y=11;\end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{c}x-y=11,\\x-2y=1;\end{array}\right.$ 3) $\left\{\begin{array}{c}x-y=-1,\\x-2y=-11;\end{array}\right.$

4)$ \left\{\begin{array}{c}x-y=-11,\\x-2y=-1.\end{array}\right.$ Из каждой системы получаем решения.

Ответ: (21; 10), (−9; −10), (−21; −10), (9; 10).

Пример 2. Решить уравнение в целых числах: *5х2+5у2+8ху+2у*$-$*2х+2=0.*

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно переменной *х:*

*5х2 + (8у − 2)х + 5у2 + 2у + 2 = 0,*

*D = (8у − 2)2 − 4·5(5у2 + 2у + 2) = 64у2 −32у + 4* $-$*100у2 −40у – 40 = = −36 (у2 + 2у + 1) = −36 (у + 1)2*

Для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы  *D = 0,*

*−36(у + 1)2 = 0*. Это возможно при  *у = −1*, тогда *х = 1.*

Ответ: (1;−1).

*Использование параметра.*

Пример 1. Решить уравнение в целых числах: *2х2−2ху + у*$ + 9$*х=2.*

Решение. Перепишем уравнение в виде *2х2−х(2у −9)+ у*$-2+a$*=a* и разложим левую часть уравнения на множители как квадратный трёхчлен относительно *х*. *D*=$ 4y^{2}-44y+97-8a.$Если $97-8a=121,$ то дискриминант будет полным квадратом. При этом $ a=-3$ и $x=\frac{2y-9\pm (2y-11)}{4}, $ $ x\_{1}=0,5 ; x\_{2}=y-5.$ Уравнение принимает вид *(2х−1)(х−у+5)= −3.*

Ответ: (1; 9), (−1; 3), (2; 8), (0; 2).

Пример 2. . Решить уравнение в целых числах: $xy-y^{2}=x.$

Решение. Решим данное уравнение, переписав его в виде *y2−* $ху+$*х*+*a=a* и разложив левую часть уравнения на множители как квадратный трёхчлен относительно *у*: $D=(-x)^{2}-4\left(x+a\right)=x^{2}-4x-4a,$ если *a*=−1, то дискриминант будет полным квадратом $y=\frac{x\pm (x-2)}{2}, $ $ y\_{1}=1 ; y\_{2}=x-1;$

уравнение принимает вид *(y−1)( у − х +1)= −1.*

Ответ: (0; 0), (4; 2).

На занятии можно решить в целых числах уравнение $3x^{2}+4xy-7y^{2}-13=0.$ Многочлен $3x^{2}+4xy-7y^{2}$ можно разложить на множители как квадратный трёхчлен относительно переменной *х* или *у*, а также с помощью параметра; (после преобразования уравнение принимает вид *(х+у)(3х−7у)= 13).*

Учащимся можно предложить решить в целых числах уравнения ( с использованием параметра) самостоятельно или в качестве домашнего задания:

$1) x^{2}-7xy+6y^{2}$=18,(после преобразования уравнение принимает вид *(х− у)( х−6у)= 18).*

$2) x^{2}-xy-2y^{2}$=1,(после преобразования уравнение принимает вид *(х + у)( х−2у)= 1).*

$3) x^{2}-x+1=y^{2}$,(после преобразования уравнение принимает вид *(2х+2 у−1)(2 х−2у−1)= −3).*

 **Метод решения относительно одной переменной.**

*Выделение целой части.*

Пример 1. Найти все пары целых чисел *х* и *у*, удовлетворяющие уравнению $3xy+14x+17y+71=0.$

Решение. Выразим из данного уравнения *у* через *х*:$y=-\frac{14x+71}{3x+17}, 3x+17\ne 0.$

Выделим целую часть из алгебраической дроби:$ y=-\frac{4\left(3x+17\right)+2x+3}{3x+17}=-4-\frac{2x+3}{3x+17}.$ Умножим обе части последнего равенства на 3. Получим $ 3 y=-12-\frac{6x+9}{3x+17}=-12-2+\frac{25}{3x+17},$ $3 y+14=\frac{25}{3x+17}.$ Так как числа $3 y и 14$ –целые, то $3x+17$ должно быть делителем числа 25:$ 3x+17$=$\pm 1; \pm 5; \pm 25;возможны целые значения x=-4; -6; -14$*.* Тогда значения $ y=-3; -13; -5.$

Ответ: (−4; −3), (−6; −13), (−14; −5).

Пример 2. Решить уравнение в целых числах *х2 + ху – у – 2 = 0.*

Решение. Выразим из данного уравнения у через *х* : *у(х - 1) =2 - х2,*

*у = = – = – = – += −(х + 1) + , (х1).*

Так как *х, у* – целые числа, то дробь  должна быть целым числом.

Это возможно, если *х – 1 = *

1) 2) 

  

Ответ: (0;−2);(2;−2).

*Использование дискриминанта (неотрицательность).*

Пример1. Решить в целых числах уравнение *3(х2 + ху +у2) =х+8у.*

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно переменной *х*.

*3х2 +(3у−1)х +3у2 −8у=0.* Найдем дискриминант уравнения *D=−27y2+90у+1.* Данное уравнение имеет корни, если D$\geq $0, *−27y2+90у+1*$\geq $0.Так как *у*$\in Z, $то *у =0; 1; 2; 3.*Перебирая значения, получим, что исходное уравнение в целых числах имеет решение (0;0), (1; 1).

Ответ: (0;0), (1; 1).

 *Использование дискриминанта (полный квадрат).*

Пример 1. Решите в целых числах уравнение *х*² −*ху* + *у*² = *х* + *у* .

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно переменной *х.*

*x2−(у+1)х +у2−у=0.* Его дискриминант должен быть квадратом некоторого целого числа *t,* т.е. *D=−3y2+6у+1= t2.* Получаем новое уравнение

*3y2−6у−1+t2=0; 3(у−1)2+ t2=4; 3(у−1)2 =4− t2; 4− t2*$\geq $*0, t=0;* $\pm $*1,*$\pm 2$*.*

*3(у−1)2 =4− t2.*

Если *t=0*, то уравнение целого решения не имеет.

Если *t2=1,*то уравнение имеет целые решения *у1=2, у2=0*. При *у=2* значение *х=1* или *х=2*. При *у=0* значение *х=0* или *х=1*.

Если *t2=4,* то уравнение имеет одно целое решение *у=1*. При этом *х=0* или *х=2*.

Ответ: (1; 2), (2; 2), (0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1).

Пример 2. Решите в целых числах уравнение 2*х*² + 5*ху* + 3*у*² + 5 *х* + 8*у* = 7.

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно *у.*

3*у*² + (5*х* + 8)*у* + (2*х* – 7 + 5*х*) = 0.

у==

==.

Пусть *х+ 20х + 148 = m*, тогда *х+ 20х + (148 - m) = 0;*

*х= – 10.*

Пусть *m*−48 = *k*, тогда *m* − *k*= 48; (*m* − *k*) (*m* + *k*) = 48.

Т.к. *х* и *у* – целые числа, то *m* и *k*– тоже целые числа, (*m* −*k*) и (*m* + *k*) –целые числа.

Целые множители числа 48=1∙ 48=2∙24=4 ∙12=8 ∙ 6=16 ∙3=−1 ∙(−48)=

 −2 ∙(−24) =−4∙(−12)=−8 ∙ (−6)=−16 ∙(−3).

Получаем:

1)  4)  7)  10) 

2)  5)  8)  11) 

3)  6)  9)  12) 

Пары чисел 1 и 48; 16 и 3; −1 и −48; −16 и −3 не рассматриваем, т.к. *m* и *k*

не целые.

Получаем:

*1) m = 13; k = 11; 2) m = 13; k = −11; 3) m = 8; k = 4; 4) m = 8; k = −4;*

*5) m = 7; k = −1; 6) m = 7; k = 1; 7) m = −13; k = −11; 8) m = −13; k = 11;*

*9) m = −8; k = −4; 10) m = −8; k = 4; 11) m = −7; k = 1; 12) m = −7; k = −1.*

Если *m = ±13; k = ±11,* то *х=21; х=1.*

Если *m = ±7; k = ±1,* то *х=−11; х=−9.*

 Если *m = ±8; k = ±4,* то *х=−14; х=−6.*

Найдем значение переменной *у.*

Если *х* = −21, то *у* =

*у*=Ζ – не удовлетворяет условию; *у*=т.е. (−21; 14).

Если *х* = 1, то *у*= *у* = ; *у*==0, т.е. (1; 0).

Если *х* = −11, то *у*=*у*=  Ζ; *у*== 9, т.е. (− 11; 9).

Если *х* = − 9, то *у*=, *у*=  Ζ; *у*==5,т.е. (−9; 5).

Если *х* = −14, то *у*=, *у*=; *у* ==9, т.е. (−14; 9).

Если *х* = −6, то *у*=, *у*=; *у*==5, т.е. (−6; 5).

Ответ: (−21; 14); (1; 0); (−11; 9); (−9; 5); (−14; 9); (−6; 5).

**Метод «спуска».**

*Метод конечного «спуска».*

Пример 1. Решить в целых числах уравнение *2х2−5у2=7.*

Решение. Так как *2х2***−** четное число, 7**−** нечетное число, то *5у2***−** должно быть нечетным, т.е. *у* − нечетное. Пусть *у=2z+1*,где *z*$ \in Z,$ тогда данное уравнение можно переписать в виде *x2 −10z2−10z=6*. Отсюда видно, что *х* должно быть четным. Пусть *х=2m*, тогда последнее уравнение примет вид *2m2−5 z(z+1)=3*, что невозможно, т.к. число *z(z+1)* – четное, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет решений.

Пример 2 . Решить в целых числах уравнение *m4−2n2=1.*

Решение. Заметим, что m- нечетное число, и что m и n могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Договоримся искать неотрицательные решения. Пусть m=2t+1, тогда

*m4−1= (m−1) (m+1) (m2+1) = 2t (2t+2) (4t2+4t+2) =2n2.*

Тогда 4*t(t+1)(2t2+2t+1)=n2*, получается, что n− четное число. Пусть n=2z, тогда *t(t+1)(2t2+2t+1)=z2.* Числа *t, t+1, 2t2+2t+1=2t(t+1)+1* числа попарно взаимно простые, а их произведение полный квадрат. Следовательно, каждое из них является полным квадратом. Это возможно только при t=0, иначе t+1 не будет квадратом. Тогда и z=0, получаем, что m=$\pm 1,$ n=0.

Ответ: m=$\pm 1,$ n=0. Шевкин)

Пример 3. Решить в целых числах уравнение *19х+ 28у= 729.*

Решение. Так как *(18х+ 27у) + (х+ у) = 729*, то *х+ у* делится на 3,

поэтому *х = 3и, у = 3v* и *19 и+ 28v= 81.*

Повторяя рассуждения, получим *и* = 3t, *v =* 3s и 19t+ 28s= 9.

Последнее уравнение, очевидно, не имеет решений в целых числах, а значит, и исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

*Метод бесконечного «спуска».*

Пример 1. Решить в целых числах уравнение *2х2-5у2=z2*.

Решение. Запишем уравнение в виде *2х2− z2=5у2*. Левая часть уравнения кратна 5. Рассмотрим остатки при делении выражения *2х2− z2* на 5.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*** | ***0*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** |
| ***х2*** | ***0*** | ***1*** | ***4*** | ***4*** | ***1*** |
| ***2х2*** | ***0*** | ***2*** | ***3*** | ***3*** | ***2*** |

Из таблицы видно, что для разрешимости в целых числах исходного уравнения числа *х* и *z* должны быть кратны 5.

Пусть *х=5х1, z=5z1*, тогда уравнение примет вид *10х12−у2=5z12.* Следовательно, значения *у* кратны 5, т.е. *у=5у1.* После сокращения на 5 уравнение примет вид *2х12-5у12=z12*.

Из приведенных рассуждений следует, что числа *х, у, z* кратны *5.*

Числа х1, у1, z1 также кратны 5… Числа, удовлетворяющие исходному уравнению, должны делиться на 5, сколько бы раз их не делили. Единственное число, обладающее этим свойством, есть нуль. Значит, уравнение *2х2-5у2=z2* имеет единственное решение в целых числах (0; 0; 0).

Ответ: (0; 0; 0).

**III. Задачи на целые числа в ЕГЭ**

В заданиях теста ЕГЭ по математике стало модным предлагать учащимся решить уравнение в целых числах. Большинство учащихся не имеют представлений о том, что есть такие уравнения. Такие задания необходимо показывать учащимся, чтобы не только научить их, но и научится самим решать их более простыми способами. Рекомендуем использовать их на внеклассных занятиях, начиная с 7-8 класса.
Пример 1.Найдите все пары натуральных чисел разной чётности, удовлетворяющие уравнению

 Решение. Натуральные числа разной чётности удовлетворяют уравнению тогда и только тогда, когда



Причём числа  и разной чётности.

В качестве возможного разложения

 где *p-*нечётно, а *q*-чётно, имеем следующие варианты:



При p$<0, q<0$ решений в натуральных числах нет.

*Ответ:*(13;156), (15;60), (21;28), (156; 13), (60; 15), (28; 21).

Пример 2. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие

уравнению $\frac{1}{х}+\frac{1}{у}=\frac{1}{239}.$

Решение. Приведем, данное уравнение, к общему знаменателю. $\frac{239y+239x}{239xy}=\frac{xy}{239xy}, $ Помножим уравнение на знаменатель

$$239y+239x=xy, $$

$$xy-239x-239y+239^{2}=239^{2}, $$

$$ x\left(y-239\right)-239\left(y-239\right)=239^{2}, \left(y-239\right)\left(x-239\right)=239^{2}.$$

239- простое число, поэтому возможны следующие разложения на

множители: 2392=239∙239=2392∙1. 1) $\left\{\begin{array}{c}x-239=239,\\y-239=239;\end{array}\right.$ 2)$\left\{\begin{array}{c}x-239=239^{2},\\y-239=1;\end{array}\right.$ 3)$\left\{\begin{array}{c}x-239=1,\\y-239=239^{2}.\end{array}\right.$

Ответ: (478;478), (240; 2392+ 239), (2392+239; 240).

*Рассмотрим решение данного примера другим способом****.***

Решение. Так как 239 – простое число, то знаменатели дробей кратны ему, т.е. *х=t, y=239t.* Тогда уравнение примет вид: $\frac{1}{t}+\frac{1}{239t}=\frac{1}{239},$$ \frac{240}{ 239t}=\frac{1}{239},$*t=240.*

*х=240, y=239∙240* или  *х=239∙240, y=240.*

Если *х=239t, y=239t*, то $\frac{1}{239t}+\frac{1}{239t}=\frac{1}{239}$, $ \frac{2}{ 239t}=\frac{1}{239}, $ *t=2, х=478, у=478.*

Можно предложить учащимся для самостоятельного решения следующие задания:

1) решить в натуральных числах уравнения: а) $\frac{1}{х}+\frac{1}{у}=\frac{2}{1997}. $

Ответ: (999; 999∙1997), (999∙1997; 999), ( 1997; 1997);

 б) $\frac{1}{х}+\frac{1}{у}=\frac{1}{p}.$ Ответ: (p+1;p(p+1)), (p(p+1); p+1),(2p; 2p).

2) решить в целых числах уравнения: а) $\frac{1}{х}+\frac{1}{у}=1. $Ответ (2; 2).

б) $\frac{1}{х}+\frac{1}{у}=\frac{1}{5}.$ Ответ: (6;30), (30; 6), (4; −20), (−20; 4), (10; 10).

Пример 3. Решить уравнение в натуральных числах *x+y=x2−xy+y2.*

Решение.  *x2−xy+y2 –x−y=0, x2−x(y+1)+y2*−*у=0.*Решим квадратное уравнение относительно переменной *х*. *D=(y+1)2 – 4(y2−y)=−3y2+6y+1*; *−3y2+6y+1*$>0,$

у1=$ \frac{-6+\sqrt{48}}{-6}=1-\frac{2\sqrt{3}}{3},$ у2 =$ \frac{-6-\sqrt{48}}{-6}=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}.$ Так как уравнение рассматривается в натуральных числах, то *у=1*, *у=2*.

Если *у=1*, то *х+1=х2−х+1*, т.е. *х=0, х=2*, (0$\notin $N).

Если *у=2*, то *х+2=х2−2х+4,* т.е. *х=1, х=2.*

Ответ: (2; 1), (1; 2), (2; 2).

Если уравнение *x+y=x2−xy+y2* решать в целых числах, то его решение добавятся следующие пары чисел (0;0), (1; 0), (0; 1).

Пример 4. Решить уравнение в целых числах *3x2+2x+3y−2=0.*

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде *3y=2−2x−3x2*, из соображения делимости *3y* $\vdots 3, $*3x2* $\vdots 3$ следует, что *2−2x* $\vdots 3$.

Если  *x=3k,* то *2х-2=6k-2* не делится на 3.

Если  *x=3k+1,* то *2х-2=6k* делится на 3.

Если *x=3k+2,* то *2х-2=6k+2* не делится на 3.

Итак,  *x=3k+1,* $y=\frac{2-2x-3x^{2}}{3}=\frac{2-2\left(3k+1\right)-3(3k+1)^{2}}{3}=2k-(3k+1)^{2} . $

Ответ:  *x=3k+1,* $y=2k-(3k+1)^{2}$, где k− произвольное число.

Пример 5. Решить в целых числах систему уравнений

$\left\{\begin{array}{c}xy+z=94,\\x+yz=95.\end{array}\right.$

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

 *x(y−1)+z(1−y)=−1, (y−1)(x−z)=−1.* Составим системы уравнений$ \left\{\begin{array}{c}y-1=1,\\x-z=-1;\end{array}\right.$и $\left\{\begin{array}{c}y-1=-1,\\x-z=1.\end{array}\right.$

Ответ: (31; 2; 32), (95; 0; 94).

Пример 5. Найти все целые числа m и n такие, что *2mn+3m=10* и *n+m*$\geq 5.$

Решение. Из первого условия следует, что *m(2n+3)=10*.

Заметим, что число m− целое, а число *2n+3−* целое и нечетное.

Так как их произведение равно 10, то возможны варианты:

1)$ \left\{\begin{array}{c}m=2,\\2n+3=5;\end{array}\right.$ *n=1,* *m+n=3*$<5$, не удовлетворяет условию.

2)$ \left\{\begin{array}{c}m=-2,\\2n+3=-5;\end{array}\right.$  *n=−4,* *m+n=−6*$<0$, не удовлетворяет условию.

3) $\left\{\begin{array}{c}m=10,\\2n+3=1;\end{array}\right.$  *n=−1,* *m+n=9*$>5$, то $\left\{\begin{array}{c}m=10,\\n=-1.\end{array}\right.$

4)$ \left\{\begin{array}{c}m=-10,\\2n+3=-1;\end{array}\right.$ *n=−2,* *m+n=−12*$<5$, не удовлетворяет условию.

Ответ: *m=10, n=−1.*

Пример 6. Решить уравнение *х2+1=5y* в целых числах.

Решение. Правая часть уравнения делится на 5, то и левая должна делиться на 5.

Если *x=5m*, то *25m2+ 1* не делится на *5*.

Если *x=5m+1,* то *(5m+ 1)2+1= 25m2+ 10m+2* не делится на *5.*

Если *x=5m+2,* то *(5m+ 2)2+1= 25m2+20m+5* делится на *5.* В этом случае имеем решения $\left\{\begin{array}{c}x=5m+2,\\y=5m^{2}+4m+1,\end{array}\right.$ где m$ \in Z.$

Если *x=5m+3,* то *(5m+ 3)2+1= 25m2+30m+10* делится на *5*. В этом случае имеем решения $\left\{\begin{array}{c}x=5m+3,\\y=5m^{2}+6m+2,\end{array}\right.$ где m$ \in Z.$

Если *x=5m+4,* то *(5m+ 4)2+1= 25m2+40m+17* не делится на *5*.

Ответ: $\left\{\begin{array}{c}x=5m+2,\\y=5m^{2}+4m+1,\end{array}\right. или \left\{\begin{array}{c}x=5m+3,\\y=5m^{2}+6m+2,\end{array}\right.$ где m$ \in Z.$

Пример 7. Найти все целочисленные решения системы $\left\{\begin{array}{c}7889x^{3}=2875y^{3},\\\left|y\right|\leq 8.\end{array}\right.$

Решение. Разложим числа *7889* и *2875* на простые множители:

*7889=23∙73, 2875=23∙53*. После сокращения на *23* и извлечения кубического корня первое уравнение системы примет вид *7x=5y*. Так как 5 и 7− взаимно простые числа, то из последнего равенства следует, что число y должно делиться на 7. Из условия $\left|y\right|\leq 8$ следует, что y принимает значения −7; 0; 7.

Найдём значения x=−5; 0; 5.

Ответ: (−5; −7), (0; 0), (5; 7).

Пример 8. Найти все пары целых чисел *x* и *y*, удовлетворяющих уравнению *3ху+16х+13у+61=0.*

Решение. Перепишем уравнение в виде *у(3х+13)=−(16х+61).*

Выражение *13х+13* $\ne 0$ ни при каких целых *х.*

$$y=-\frac{16x+61}{3x+13}=-\frac{15x+65+x-4}{3x+13}=-5+\frac{4-x}{3x+13}.$$

Так как у− целое, то дробь также должна быть целым числом, $\frac{4-x}{3x+13}=k, k\in Z.$ Удобнее дробь умножить на 3, т.к. 3k− тоже целое число.

$$3k=\frac{12-3x}{3x+13}=\frac{25-3x-13}{3x+13}=\frac{25}{3x+13}-1, \frac{25}{3x+13}- целое число.$$

Тогда $3x+13=\pm 1, \pm 5, \pm 25, x\in Z.$

Ответ: (−4; 3), (−6; −7), (4; −5).

Пример 9. Найти все пары натуральных чисел *x* и *y*, удовлетворяющих уравнению *х2−3у=xy.*

Решение. Перепишем уравнение в виде *у(х+3)=х2.*

Выражение  *х+3* $\ne 0$ ни при каких натуральных *х=1,2,3,….. ,* $y=\frac{x^{2}}{x+3}.$Удобнее выполнить замену, *х+3=t, t=4,5, 6…,*

$y=\frac{(t-3)^{2}}{t}=\frac{t^{2}-6t+9}{е}=t-6+\frac{9}{t}.$

Так как у$ \in N, $ то *t=3* или *t=9,* тогда *у=4, х=6.*

Ответ: (6; 4).

Пример 10. Найти целые положительные решения уравнения

*2x2+2xy− x +y=112.*

Решение. Перепишем уравнение в виде *у(2х+1)=112+х−2х2.*

x, у$ \in N,$ *2х+1*$\ne 0$*.*

$$y=\frac{112+x-2x^{2}}{2x+1}=\frac{112+2x-(2x^{2}+x)}{2x+1}=-x+\frac{2x+112}{2x+1}==-x+\frac{2x+1+111}{2x+1}=-x+1+\frac{111}{2x+1}.$$

111$\vdots \left(2x+1\right), 111=1∙111=3∙37.$

Если $ 2x+1=1$, то *х=0, у=112, x* $\notin N.$

Если $ 2x+1=3$, то *х=1, у=37, x* , *у*$ \in N.$

Если $ 2x+1=37$, то *х=18, у=−14,*  *у*$ $$\notin N.$

Если $ 2x+1=111$, то *х=55, у=−53,*  *у*$ $$\notin N.$

Ответ: (1; 37).

Пример 11. (Олимпиада «Покори Воробьевы горы» 2010г.)

Какое из значений 8, 43, 2010 может принимать *N,* если известно, что уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y} $*=*$ \frac{1}{ N}$ имеет единственное решение в натуральных числах *х* и *у*?

Решение. Приведем, данное уравнение, к общему знаменателю.

 $\frac{yN-xN}{xyN}=\frac{xy}{xyN}, $ помножим уравнение на знаменатель

$$yN-xN=xy, $$

$$xy+xN-yN-N^{2}=-N^{2}, $$

$$ x\left(y+N\right)-N\left(y+N\right)=-N^{2}, \left(y+N\right)\left(x-N\right)=-N^{2}.$$

В данном случае возможны 6 вариантов систем, и только одна из них имеет решение в натуральных числах. $\left\{\begin{array}{c}x-N=-1;\\y+N=N^{2}.\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x=N-1;\\y=N^{2}-N;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x=N-1;\\y=N(N-1).\end{array}\right.$

1) Если *N=8*, то *х=7, у=7∙8=56*; $\frac{1}{7}-\frac{1}{56} $*=*$ \frac{1}{ 8}$.

2) Если *N=43*, то *х=42, у=42∙43*; $\frac{1}{42}-\frac{1}{42∙43} $*=*$ \frac{1}{ 43}$.

3) Если *N=2010*, то *х=2009, у=2010∙2009*; $\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010∙2009} $*=*$ \frac{1}{ 2010}$.

При *N=43* данное уравнение имеет единственное решение в натуральных числах, т.к. 8 и 2010−составные числа.

Ответ: *N=43*.

Аналогичное задание можно предложить учащимся для самостоятельного решения.

Пример 12. (Олимпиада «Покори Воробьевы горы» 2010г.)

Какое из значений 6, 47, 2010 может принимать *N,* если известно, что уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y} $*=*$ \frac{1}{N}$ имеет единственное решение в натуральных числах *х* и *у*?

Ответ: *N=47.*

Пример 13. Существуют ли такие целые положительные числа *х* и *у*, что

*х4 –у4=х3 +у3?*

Решение. Разложим обе части уравнения по формулам сокращенного умножения: *(х2−у2)( х2+у2) =(х+у)( х2−ху+у2).* Разделим на *х+у*$\ne 0, $получаем: *(х−у) (х2+у2) = х2−ху+у2*. Левая часть больше или равна *х2+у2* (так как из условия видно, что *х*$ >у), $а правая часть меньше.

Ответ: не существует.

Пример 14. Решить в натуральных числах уравнение *х + y + z = xyz.*

Решение. 1) Если *х = у = z,* то *z= 3z* или *z= 3*, что невозможно при целом *z*.

2) Пусть x$\leq y<z$*,* (x$<y\leq z)$, тогда *х + у + z* $<$ *3z*, а так как *x + y + z = xyz,* то *xyz* $<$ *3z* или *ху* $<$ *3*, т.е. *ху = 2,* либо *ху = 1*.

Если *ху = 2*, то *х = 1, у = 2*, и из исходного уравнения найдем *z = 3*.

Если *ху = 1*, то *х = у = 1*, и из исходного уравнения получим *2 + z = z,* что невозможно.

Из найденного уравнения *х=1, у=2, z = 3* найдем остальные перестановками.

Ответ: *(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3),(2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).*