**Приложение 1.**

Персональный идентификатор 102-573-775 Татьяна Викторовна Жаворонкова

г. Пятигорск

**Комментарии и краткое решение предложенных задач.**

**Задание 1.** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

cos3x –(4a+1)cos2x+(3a2+4a)cosx-3a2 = 0 имеет на отрезке  четное число корней.

Сгруппируем слагаемые левой части уравнения:

cos2x(cosx – 1) -4acosx(cosx – 1) +3a2(cosx – 1) =0,

(cosx – 1)(cos2x -4acosx +3a2) =0,

Первое уравнение на указанном промежутке имеет единственный корень x = 0. Интересующий нас случай может реализоваться, если

а) (2) имеет четное число корней, не совпадающих с (1), а (3) – нечетное.

б) (3) имеет четное число корней, не совпадающих с (1), а (2) – нечетное.

в) одно из уравнений (2) или (3) имеет на промежутке нечетное число корней, а другое вообще корней на данном промежутке не имеет.

Функция cosx на указанном промежутке единожды принимает значения 1 или [0;1/2).

Значения из полуинтервала [1/2;1) принимаются дважды, другие значения приниматься не могут.

Существование единственного решения уравнений (2) или (3):

(2):  (3): .

Совпадение множеств решений (2) и (3) при а = 0.

При а=0 (2) и (3) имеет единственное решение , которое не совпадает с решением (1). Общее число решений исходного уравнения равно 2. При 0<a<1/6 уравнения (2) и (3) имеют по одному несовпадающему решению, число решений исходного уравнения равно 3. При 1/6≤a<1/3 второе уравнение имеет один корень, а третье имеет два корня на указанном промежутке. Общее число корней исходного уравнения равно 4. При a = 1/3 общее число корней исходного уравнения рано 2, так как (3) имеет единственный корень х = 0. При 1/3 <a <1/2 число корней (2) на указанном промежутке равно 1, общее число решений исходного уравнения равно 2. При 1/2 ≤a<1 число корней (2) на  равно 2, общее число корней исходного уравнения равно 3. При a = 1 исходное уравнение имеет единственный корень на данном промежутке. Объединяя удовлетворяющие нас значения а, получаем ответ.

Ответ. 

**Задание 2.** Найдите все значения параметра а, при которых уравнения

(a+1)cos4x -26acos2x +14a +1= 0, 4sin3x +6sin2x – 2sinx -3 = 0

равносильны.

Решим второе уравнение системы. (2sinx +3) (2sin2x – 1) =0. Преобразуем первое уравнение системы, используя формулы: cos4x=2cos22x-1,  Пусть cos2x=p. Тогда (a+1)(2p2-1)-13a(1+p)+14a+1 = 0, p(2p(a+1)-13a)=0 (\*). Очевидно, что p = 0 является решением уравнения при любом значении а. Если (\*) не имеет других корней p, кроме тех, что больше 1 или меньше -1 (это не позволит найти х при возврате к прежней переменной) или равны 0 , то исходная пара уравнений будет равносильной парой. Уравнение (2p(a+1) -13a) = 0 имеет корень p = 0 при а = 0.

При а = -1 у него корней нет. Найдем все значения параметра а, при которых имеет решение совокупность   Объединяя найденные значения а, получаем ответ.

Ответ. 

**Задание 3.** Найдите все значения параметра а, при которых уравнение  имеет решение.

Решение. Преобразуем уравнение к виду  Уравнение имеет решение при 

Ответ. 

**Задание 4.** Решите уравнение x2 -2xcosa+1=0 при всех значениях параметра а.

Уравнение квадратное относительно x. D1 = cos2a – 1. Уравнение имеет решение только при cosa =±1.

Ответ. При  x = 1; при  x = -1.

**Задание 5.** Решите уравнение 9cos4x -12acos2x +2a2+9= при всех значениях параметра а. Используя формулу приведения степени, преобразуем уравнение к виду (3cos2x-a)2 = 0, откуда с очевидностью следует ответ.

Ответ. -3 ≤ а ≤ 3.

**Задание 6.** Решите неравенство sin4x + cos4x ≥ a при всех значениях параметра а.

**Первый способ.** Применяем формулы понижения степени: 

Eщё раз применяя формулы понижения степени, получаем cos4x > 4a – 3.

При 4а -3 <-1 неравенство верно при всех xϵR, при 4а -3 ≥1 решений у неравенства нет. При -1≤ 4a -3 <1 решением неравенства является объединение промежутков 

Ответ. При a<1/2 решением неравенства является любое действительное х; при 1/2≤a<1 решением неравенства является объединение промежутков  При а≥1 решений у неравенства нет.

**Второй способ**. Можно преобразовать левую часть неравенства, используя основное тригонометрическое тождество. (sin2x+cos2x)2-2sin2xcos2x= 1-(sin22x)/2. Получаем из исходного неравенства следующее: sin22x < 1 – 2a.

Ответ. При 4а -3 <-1 неравенство верно при всех xϵR, при 4а -3 ≥1 решений у неравенства нет. при 1/2≤a<1 решением неравенства является объединение промежутков 

**Задание 7.** При каких значениях параметра а уравнение cos22x - (a2 – 3)cos2x +a2 – 4 =0 имеет ровно два корня на промежутке 

Используя теорему Виета, получаем Первое уравнение имеет на указанном промежутке единственный корень x = 0. Учтем, что 0≤2x≤ для указанного промежутка. Второе уравнение совокупности имеет на данном промежутке один корень при -1≤a2 -4≤1, при этом отличающийся от корня первого уравнения при a2 ≠5. Следовательно, условию задачи удовлетворяют все а ϵ 

Ответ. 

**Задание 8**. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции  содержит отрезок [2;3].

Ответ. -1.

Решение. Пусть , используя основное тригонометрическое тождество, получаем Выполним замену переменных t=cos3x, где -1 ≤t ≤1.

 y(t) непрерывная убывающая функция. Для выполнения условия задачи необходимо чтобы y(-1)≥3, а y(1)≤2.

y(-1) = (b+2)/b2. Получаем для b условие -2/3 ≤ b ≤ 1. Поскольку b≥1, нас может удовлетворять только b =1. y (1) =( b-2)/b2. При b=1 y(1) <2. При b=1 a= -1.

**Задание 9.** При каких значениях параметра t уравнение sinx + cosx –sinxcosx =t имеет решение?

Пусть sinx + cosx =p, sinxcosx = f.Используя метод вспомогательного угла, получаем  Из основного тригонометрического тождества тогда имеем Для t(p)=  находим множество значений функции для  Непрерывная функция t(p) принимает наибольшее значение при p = 1, оно равно 1, наименьшее значение функция t(p) принимает при , оно равно 

Ответ. 

**Задание 10.** Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение на отрезке 

Решение. Учитывая ОДЗ, получаем  На ОДЗ исходное уравнение принимает вид

2kcost-2sint=k (\*). При k=0 уравнение имеет решение t = π. При t≠π можно сделать замену переменных  где  причем для отрезка  p≥1. В новых переменных уравнение принимает вид 3kp2 +4p – k = 0. При k≠0 

p≥1 при -2 ≤ k <0. Из уравнения (\*) и условия cost ≠ -sint получаем k≠-2sint/(1+2 sint). Так как запрещенным значением на указанном промежутке для синуса является , получаем, что k≠ 

Ответ.  или 