Приложение 2.

**Примеры исследования функции**

Пример 24. Исследуйте функцию *f (x)*=$\frac{x²+2x-3}{x-2}$.

Решение:

*f (x)*=$\frac{x²+2x-3}{x-2}$=$\frac{\left(x+3\right)(x-1)}{x-2}$.

1. *D(f)*={x$\in R:x-2\ne 0\}$={x$\in R:x\ne 2\}=\left(-\infty ;2\right)∪(2;+\infty )$;

2. Вертикальная асимптота *х*=2. Проверка: если *х*=2, то (*х*+3)(*х*-1)$\ne $0.

3. Точки пересечения с осями координат: *а*) *f (0)*=$\frac{\left(x+3\right)(x-1)}{x-2}$=1,5; точка (0; 1,5);

|  |  |
| --- | --- |
| *б) f (х)=0*, тогда | (*х+3*)(*х-1*)=0,*х*=-3 или *х*=1, точки (-3; 0) и (1; 0) |
| 4. Промежутки знакопостоянства:  | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\Копия 2.jpg*Рис. 10* |

5. Исследуем функцию на четность или нечетность:

*а)* *D(f)* $=\left(-\infty ;2\right)∪(2;+\infty )$ - это симметрическое множество;

*б) f (-x)* =$\frac{\left(-x+3\right)(-x-1)}{-x-2}$=$\frac{\left(3-x\right)(x+1)}{x+2}$,

так как *f (-х)*$\ne $ *f (х)* и *f (-х)*$\ne $*- f (х)*, то функция *f* не является ни четной, ни нечетной.

|  |
| --- |
| 6. Степень числителя на единицу больше степени знаменателя, значит, существует  |
| наклонная асимптота. Выделим целую часть |
|  *\_х2+* 2*х -* 3 | *х* - 2*х2* - 2*х*  *х* + 4 \_4*х* -3 4*х* – 8 5 | *f (x)=*$\frac{\left(x+3\right)(x-1)}{x-2}$= *х*+4 +$ \frac{5}{x-2}$;(*x*$→\pm \infty )⇒(\frac{5}{x-2}→$0)$ ⇒$ *f (x)* $→ $*x+*$4⇒ $(*f* (*x*) *-* (*x+*4))$→ $0,значит, по определению *у* = *х* + 4 – наклонная асимптота. |

Так как *f (x)* = *х*+4 +$ \frac{5}{x-2}$, где $\frac{5}{x-2}\ne $ 0, значит, график не пересекает наклонную асимптоту.

|  |  |
| --- | --- |
| 7. Области существования графика: | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 11* |

8. *E(f)*: y= *f (x)*=$\frac{x²+2x-3}{x-2}$. Пусть *у* – параметр, выясним возможность корней у

|  |  |
| --- | --- |
| параметрического уравнения | *yх-*2*у=x2+2x-3*$ $*х²+*(2-*у*)*х+*(2*у-3*)*=*0*, у*$\ne $0*,**D=*(2-*у*)*2-4*(2*у-3*)*=4-4y+y2-8y+12=y2-12y+16*$\geq $*0**y2-12y+16=0, D=36-16=20**y=6*$\pm \sqrt{20}$*=6*$\pm 2\sqrt{5}$ |
| *C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpgРис. 12* |

*E(f)*=$(-\infty ; 6-2\sqrt{5}]∪\left[6+2\sqrt{5}; \right.\left.+\infty \right)$.

9. Так как *E(f)*=$(-\infty ; 6-2\sqrt{5}]∪\left[6+2\sqrt{5}; \right.\left.+\infty \right)⇒$ *у1* = 6-2$\sqrt{5}$ и *у2* = 6+2$\sqrt{5}$ являются значениями минимума и максимума функции. Найдем абсциссы точек

для функции *g(x)*= *х²+*(2-*у*)*х+*(2*у-3*) *x*0 = - $\frac{b}{2a}$ = $\frac{-(2-y)}{2} $=$ \frac{y-2}{2}$,

если *у1* = 6-2$\sqrt{5}$, то *x1* = $\frac{6-2\sqrt{5}-2}{2}$ = $\frac{2(2-\sqrt{5)}}{2}$ = 2 - $\sqrt{5}$,

если *у2* = 6+2$\sqrt{5}$, то *x2* = $\frac{6+2\sqrt{5}-2}{2}$ = $\frac{2(2+\sqrt{5)}}{2}$ = 2 + $\sqrt{5}$.

Учитывая множество значений функции, определяем, какая из точек является точкой минимума, а какая – точкой максимума: *xmin*=2 + $\sqrt{5}$, *xmax*=2 - $\sqrt{5}$,

$\min\_{D(f)}$ *f(x) = f* (2 + $\sqrt{5}$) *=* 6+2$\sqrt{5}$; $\max\_{D(f)}$ *f(x) = f* (2 - $\sqrt{5}$) *=* 6-2$\sqrt{5}$.

|  |  |
| --- | --- |
| 10. Из эскиза графика следует, что функция *f(x)*возрастает в промежутках (-$\infty ; 2 - \sqrt{5}]$ и [2 + $\sqrt{5}; +\infty )$;убывает в промежутках [$2 – \sqrt{5;2})$ и (2$; 2 + \sqrt{5}]$. | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 13* |

Пример 25. Исследуйте функцию *f (x)*=$\frac{x²-9}{x³-25x}$.

Решение:

*f (x)*=$\frac{x²-9}{x³-25x}$=$\frac{\left(x-3\right)(x+3)}{x(x²-25)}$=$\frac{\left(x-3\right)(x+3)}{x\left(x-5\right)(x+5)}$.

1. *D(f)*={x$ \in R:x(x-5)(x+5)\ne 0\}= ${x$ \in R:x\ne 0;x-5\ne 0;x+5\ne 0\} $=

={x$ \in R:x\ne 0; x\ne \pm 5\}=\left(-\infty ;-5\right)∪\left(-5;0\right)∪(0;5)∪(5;+\infty )$.

|  |  |
| --- | --- |
| 2. Вертикальные асимптоты | *x*=-5. Проверка: если *х*=-5, то (*х*-3)(*х*+3)$\ne $0;*x*=0. Проверка: если *х*=0, то (*х*-3)(*х*+3)$\ne $0;*x*=5. Проверка: если *х*=5, то (*х*-3)(*х*+3)$\ne $0. |

3. Точки пересечения с осями координат: ось *OY* не пересекает, так как $x\ne 0$;

|  |  |
| --- | --- |
| *f (х)=0*, тогда | (*х-*3)(*х+*3)=0,*х*=3 или *х*=-3, точки (-3; 0) и (3; 0). |
| 4. Промежутки знакопостоянства:  | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 14* |

5. Исследуем функцию на четность или нечетность:

*а)* *D(f)* $=\left(-\infty ;-5\right)∪\left(-5;0\right)∪(0;5)∪(5;+\infty )$ - это симметрическое множество;

*б) f (-x)* =$\frac{\left(-x-3\right)(-x+3)}{-x\left(-x-5\right)(-x+5)}$=$\frac{-\left(3-x\right)(x+3)}{x\left(x+5\right)(5-x)}=\frac{\left(x-3\right)(x+3)}{x\left(x+5\right)(5-x)}$,

так как *f (-х)*$\ne $ *f (х)* и *f (-х)*$\ne $*- f (х)*, то функция *f* не является ни четной, ни нечетной.

|  |
| --- |
| 6. Степень числителя меньше степени знаменателя, значит, горизонтальной асимптотой является ось абсцисс, *у=*0 – горизонтальная асимптота. |
| 7. Области существования графика: | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2 001.jpg*Рис. 15* |

8. Степень дробно - рациональных функции выше второй, поэтому рассмотренный способ нахождения *E(f)* в предыдущем примере, не подходит, так как получается кубическое уравнение *ax3+bx2+cx+d*=0.

|  |  |
| --- | --- |
| 9. Из эскиза графика следует, что функция *f(x)* кусочно-монотонная – на каждом из интервалов непрерывно убывает, но убывающей не является, так как условие для любых *х1,х2* $\in $*Х,* гдемножество *ХD(f)*, таких, что *х1<х2*, неравенство *f(x1)>f(x2)* не выполняется. | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 16* |

Пример 26. Исследуйте функцию *f (x)*=$e^{\frac{x²+x+1}{x²-x+1}}$.

Решение:

I. Пусть $\frac{x²+x+1}{x²-x+1}$*=q.* Исследуем функцию *q(x)=*$\frac{x²+x+1}{x²-x+1}$*.*

1. *D*(*q*): *x²-x*+1$\ne $0, D=1-4<0, *a>*0$ ⇒$ *x²-x*+1>0 при любых *х* $⇒$ *D*(*q*)=(-$\infty ; +\infty )$.

2. *x²-x*+1$\ne $0 $⇒$ вертикальной асимптоты нет.

3. Степени числителя и знаменателя совпадают, значит, горизонтальной асимптотой является прямая, *q*=1(отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя).

4. Определим абсциссу точки пересечения графика функции *q(x)* и прямой *q*=1.

$\frac{x²+x+1}{x²-x+1}$=1, *x²+x*+1= *x²-x*+1, 2*x*=0, *x*=0.

|  |  |
| --- | --- |
| 5. Область существования графика: | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2 001.jpg*Рис. 17* |

6. *E*(*q*): *y* = *q* (*x*)=$\frac{x²+x+1}{x²-x+1}$. Пусть *у* – параметр, выясним возможность корней у

|  |  |
| --- | --- |
| параметрического уравнения | *yх²-yx+у=x2+x+*1(*y*-1)*x²*-(*y*+1)*x*+(*y*-1)=0*, у*$\ne $0*,**D=*(*y*+1)*2-*4(*у-*1)²*=*(*y+*1-2*y+*2)(*y+*1+2*y*-2)=(3*-y*)(3*y-*1)$\geq $0 |
| *C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpgРис. 18* |

*E*(*q*)=$\left[\frac{1}{3};3\right]$.

7. Так как *E*(*q*)=$\left[\frac{1}{3};3\right]⇒$ *у1* = $\frac{1}{3}$ и *у2* = 3 являются значениями минимума и максимума функции. Найдем абсциссы точек для функции *g(x)*=(*y*-1)*x²*-(*y*+1)*x*+(*y*-1), *x*0 = - $\frac{b}{2a}$ = $\frac{y+1}{2(y-1)} $

если *у1* = $\frac{1}{3}$, то *x1* = -1, если *у2* = 3, то *x2* = 1. Учитывая множество значений функции, определяем, какая из точек является точкой минимума, а какая – точкой максимума: *xmin*=-1, *xmax*=1, $\min\_{D(f)}$ *q*(*x*)*=q*(-1)*=* $\frac{1}{3}$, $\max\_{D(f)}$ *q*(*x*)*=q*(1)*=*3.

 II. Переходим к функции *f (x)*=$e^{\frac{x²+x+1}{x²-x+1}}$*.*

Так как *y*=$e^{t}$ - возрастающая, то  *f(x)*=$e^{q(x)}$ повторяет кусочную монотонность *q(x)=*$\frac{x²+x+1}{x²-x+1}$*.* ($x→\infty $)$ ⇒$ ($t→1$)$ ⇒$ ($y→e$); $\min\_{D(f)}$ *f(x) = f* (-1) *=*$e^{\frac{1}{3}}$; $\max\_{D(f)}$ *f(x) = f* (1) *=*$e^{3}$.

Пример 27. Исследуйте функцию *f (x)*=$log\_{2}\left(6-x-x^{2}\right).$

|  |  |
| --- | --- |
| 1. *D(f)*={x$\in R:6-x-x^{2}>0\}$*x² + x* – 6 = 0, *x1·x2*=-6, *x1·x2*=-1, *x1*=-3, *x2*=2.*D(f)*=(-3; 2). | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2 002.jpg*Рис. 19* |
| 2. Нули функции:  | *б) f (х)=0*, тогда | $log\_{2}\left(6-x-x^{2}\right)$=0,6 *– x - x² =*1,*x² + x* – 5 = 0,*D*=1+20=21, *x1*= $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, *x2*= $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$. |

3. (6 – *x - x²*) = - (*x² + x* – 6) = - (*x² + x* + $\frac{1}{4}$) + 6$\frac{1}{4}$ = 6$\frac{1}{4} $- (*x* +$ \frac{1}{2}$)² $\leq $ 6$\frac{1}{4}$.

*g(t)*=$ log\_{2}$*t* является возрастающей на *D(f)*$ log\_{2}(6-x-x^{2})\leq log\_{2}6\frac{1}{4}$ на *D(f)*, причем $log\_{2}(6-x-x^{2})=log\_{2}6\frac{1}{4}$ при *х* = - $\frac{1}{2}$ $⇒$ $\max\_{D(f)}$ *f (x)= f*(- $\frac{1}{2}$) *=*$ log\_{2}6\frac{1}{4}.$

|  |  |
| --- | --- |
| 4. Область существования графика отмечена штриховкой.5. Из эскиза графика следует, что функция *f(x)* возрастает в промежутке (-$3; - \frac{1}{2}]$;убывает в промежутке [$- \frac{1}{2};2)$.6. *E(f)*=(-$\infty ; log\_{2}6\frac{1}{4})$. | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 20* |

Пример 28. Исследуйте функцию *f (x)*=*sin x* + 4$\sqrt{1-\sin(x)} $– 5.

*f (x)* = *sin x* + 4$\sqrt{1-\sin(x)} $– 5 = *x* -1+4$\sqrt{1-\sin(x)}$-4 = - (1 – *sin x*) + 4$\sqrt{1-\sin(x)}$ - 4 =

= - ($\sqrt{1-\sin(x)}$)² + 4$\sqrt{1-\sin(x)}$ – 4 = - (($\sqrt{1-\sin(x)}$)² - 4$\sqrt{1-\sin(x)}$ + 4) = - ($\sqrt{1-\sin(x)}$ - 2)².

1. *D(f)* = *R*.

2. *D(f)* – симметрическое множество.

*f(-x)* = *sin(-x)* + 4$\sqrt{1-\sin((-x))} $– 5 = - *sin x* + 4$\sqrt{1+\sin(x)} $– 5.

*f(-x)*$\ne $*f(x)*, *f(-x)*$\ne - $*f(x)*, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. *f (x+2*$π$*)*=*sin x* + 4$\sqrt{1-\sin((x+2π))} $– 5= *sin x* + 4$\sqrt{1-\sin(x)} $– 5 = *f (x). T=2*$π.$

4. *f (x)*$ \ne $0, так как 0$ \leq \sqrt{1-\sin(x)}\leq $1.

5. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции: -1 $\leq \sin(x)\leq $1,

при *sin x* = 1, *x* = $\frac{π}{2}+ 2πn$, $n\in Z$, *f (x) =* - ($\sqrt{1-1}$ - 2)² = - 4,

при *sin x* = -1, *x* = - $\frac{π}{2}+ 2πn$, $n\in Z$, *f (x) =* - ($\sqrt{1+1}$ - 2)² = - ($\sqrt{2}$ - 2)² = -6 + 4$\sqrt{2}$ $≈ -0,36$.

$\max\_{D(f)}$ *f* (- $\frac{π}{2}+ 2πn$) = - 6 + 4$\sqrt{2}$, $\min\_{D(f)}$ *f* ($\frac{π}{2}+ 2πn$) = - 4.

6. *E(f)* = $\left[- 4; -6 + 4\sqrt{2}\right]$.

7. Функция *f(x)* возрастает в промежутке $\left[\frac{π}{2}+ 2πn; \frac{3π}{2}+ 2πn\right], n\in Z$;убывает в промежутке $\left[-\frac{π}{2}+ 2πn; \frac{π}{2}+ 2πn\right], n\in Z$.

Пример 32. Исследуйте функцию *f (x)*=$\sqrt{log²\_{0.75}x+1}$ + $\sqrt{(log\_{0.75}x-3)²+9}$.

1. *D(f)* = (0; +$\infty $)*.*

2. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции. Введем векторы $\vec{a}$=$\left\{log\_{0,75}x;\left.1\right\}\right.$ и $\vec{b}$=$\left\{3-log\_{0.75}x; \right.\left.3\right\}$. Тогда $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{log²\_{0,75}x+1}$; $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(3-log\_{0.75}x\right)^{2}+9}$, $\vec{a}+\vec{b}=\left\{3;\left.4\right\}\right.$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3²+4²} $=$ 5$. Согласно неравенству $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\geq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, имеем *f*$\geq 5$*.*

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда$\vec{a}\uparrow \uparrow \vec{b}$, то есть когда $\frac{log\_{0,75}x}{3-log\_{0.75}x} $= $\frac{1}{3}$ $⇔$ $3-log\_{0.75}x $= 3$·log\_{0,75}x⇔ log\_{0,75}x$ *=* 0,75$⇔$ *x =*$ \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$*.* $\min\_{D(f)}$ *f (x)* = *f*$\left( \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right) $=$ 5$.

3*. E(f)* = $\left[5; \left.+\infty \right)\right.$.

Пример 29. Исследуйте функцию *f(x)*=$\left|2x-3x²\right|+\left|2x+9\right|=\left|2x-3x²\right|+\left|-2x-9\right|$.

1. *D(f) = R*.

2. *D(f)* – симметрическое множество.

*f(-x)*=$\left|2(-x)-3(-x)²\right|+\left|2(-x)+9\right|$ = $\left|-2x-3x²\right|+\left|-2x+9\right|= \left|2x+3x²\right|+\left|9-2x\right|$.

*f(-x)*$\ne $*f(x)*, *f(-x)*$\ne - $*f(x)*, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции. Для любых двух действительных чисел *a* и *b* справедливо неравенство $\left|a\right|$+$\left|b\right|\geq \left|a+b\right|$, где $\left|a\right|$+$\left|b\right|=\left|a+b\right|$, при $ab\geq 0.$

Имеем *f* =$ \left|2x-3x²\right|+\left|-2x-9\right|\geq \left|2x-3x²-2x-9\right| $= $\left|3x²+9\right|= = 3x²+9\geq 9$.

Итак, *f(x)*$\geq $9, причем знак равенства достигается при одновременном выполнении равенств $\left|x²-x\right|+\left|x+1\right|=\left|x²+1\right|$и $3x²+9=9$, то есть при *x*=0, $\min\_{D(f)}$ *f (x)*= *f*($0$) = 9.

4*. E(f)* = $\left[9; \left.+\infty \right)\right.$.

Пример 30. Исследуйте функцию *f(x)*=$\sqrt{x²+x+1}$ + $\sqrt{x²-x+1}$.

1. *D(f) = R* – симметрическое множество.

2. *f(x)>*0$ ∀ x$.

3. *D(f)* – симметрическое множество. *f(-x)*=$\sqrt{\left(-x\right)^{2}+(-x)+1}$ + $\sqrt{\left(-x\right)^{2}-(-x)+1}$ = $\sqrt{x²-x+1}$ + $\sqrt{x²+x+1}$. *f(-x)*$= $*f(x)*, значит, функция четная. Следовательно, график симметричен относительно оси *ОХ*.

4. Выясним вид монотонности на интервалах: *x* $\in \left[0;+\infty ): \right.$ *f(*0*)*=$2, $*f(*1*)*=$\sqrt{3}$ + $1⇒$ функция *f(x)* возрастает;функция четная, значит, *x* $\in \left(-\infty ;\left.0\right]\right.:$ *f(*0*)*=$2, $*f(-*1*)*=$\sqrt{3}$ + $1⇒$ функция *f(x)* убывает.

5. Из пп. 4 следует, $\min\_{D(f)}$ *f (x)*= *f*($0$) = 2.

6. Проверим асимптоту: *f(x)*=$\sqrt{x²+x+1}$ + $\sqrt{x²-x+1}=x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x²}}$ + $x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x²}}$.

(*x*$ →\infty )⇒ $(*f(x)*$→2x)$, то есть (*x*$ →\infty )⇒$((*f(x)*$-2x)→0), значит, $*y=*2*х -* наклонная асимптота на $\left[0; \left.+\infty \right)\right.$. Так как функция четная, то наклонной асимптотой на $\left(-\infty ;\left.0\right]\right. $является *y=-*2*х.*

Определим, пересекает ли график функции *f(x)* наклонные асимптоты, то есть решим уравнение: $\sqrt{x²+x+1}$ + $\sqrt{x²-x+1}$ = 2*x* на $\left(0;+\infty \right)$.

Домножим на сопряженное выражение:

$(\sqrt{x²+x+1}$ + $\sqrt{x²-x+1}$ )($ \sqrt{x²+x+1}$ - $\sqrt{x²-x+1}$) = 2*x*($ \sqrt{x²+x+1}$ - $\sqrt{x²-x+1}$),

*x² + x* + 1 - *x² + x* – 1 = 2*x*($ \sqrt{x²+x+1}$ - $\sqrt{x²-x+1}$),

2*x* = 2*x*($\sqrt{x²+x+1}$ - $\sqrt{x²-x+1}$), разделим на ($ \sqrt{x²+x+1}$ - $\sqrt{x²-x+1}$),

$\frac{2x}{\sqrt{x²+x+1} - \sqrt{x²-x+1}}=2x$, *x* = 0 – посторонний корень;

$\sqrt{x²+x+1}$ = 1+ $\sqrt{x²-x+1}$,

$\sqrt{x²+x+1}$ = $\sqrt{x²-x+1}$ только при *х* = 0,

возведем в квадрат $\sqrt{x²+x+1}$ = 1+ $\sqrt{x²-x+1},$

*x² + x* + 1 = 1 + 2$\sqrt{x²-x+1}$ + *x²* - *x* + 1,

2*x* - 1 = 2$\sqrt{x²-x+1}$, возведем в квадрат,

4*x*² - 4*x* + 1 = 4*x*² - 4*x* + 4,

1$\ne 4$ - нет корней.

7*. E(f)* = $\left[2; \left.+\infty \right)\right.$.